ΘΕΜΑ Α

Α₁. Έστω η συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$
Για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_o\in(\alpha,\beta)$, ώστε $f(x_o)=\eta$ (7Μ)

Α₂. Έστω οι συναρτήσεις $f:A\to R$, $g:A\to R$ και $0\in A$

Γνωρίζουμε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο 0
και η συνάρτηση $f+g$ είναι πάντα συνεχής στο 0 ως άθροισμα συνεχών.

α ☞ Να αιτιολογήσετε, γιατί αν η f είναι συνεχής στο 0
και η g δεν είναι συνεχής στο 0, η $f+g$ δεν είναι πάντα συνεχής στο 0 (4Μ)

β ☞ Με τη βοήθεια των συναρτήσεων $f(x)=\begin{cases} x & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ 1 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} x & \text{αν} \quad x\neq 0 \\ -1 & \text{αν} \quad x=0 \end{cases}$

να διαπιστώσετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι συνεχείς στο 0
τότε η $f+g$ μπορεί να είναι συνεχής στο 0 (4Μ)

Α₃. ☞ Έστω η συνεχής στο R συνάρτηση f
Να εξηγήστε γιατί το $f(R)$ αποκλείεται να είναι το R^* (3Μ)

Α₄. ☞ Έστω η ορισμένη στο $D=[0,1]$ συνάρτηση f και $f(D)=(0,1)$
Να εξηγήστε γιατί αυτή δεν είναι συνεχής στο D (3Μ)

Α₅. ☞ Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:D\to R$, με $f(x)\neq 0$
Αν το D είναι διάστημα, όπως γνωρίζουμε αυτή θα διατηρεί σίγουρα σταθερό πρόσημο.
Αν όμως το D δεν είναι διάστημα, δεν θα διατηρεί σίγουρα σταθερό πρόσημο.
Να το διαπιστώσετε με τη βοήθεια της συνάρτησης $f:R^*\to R$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ (2Μ)

Α₆. ☐ Έστω η συνεχής στο σύνολο D συνάρτηση f
Η γραφική της παράσταση είναι πάντα μία συνεχής γραμμή. (2Μ)

ΘΕΜΑ Β

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-8x+16 & ,\ 0\le x<5 \\ \alpha^2\ln\left(x-5+e\right)+2\left(\alpha+1\right)\cdot e^{5-x}\ , & x\ge 5 \end{cases}$

Β₁. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ (8Μ)

Β₂. Να βρείτε την τιμή του ορίου $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (8Μ)

Β₃. Θεωρούμε τώρα και τη συνεχή στο R συνάρτηση g

για την οποία είναι $\lim\limits_{x\to1}\left(\ f(0)\cdot g(x)\ \right)+\lim\limits_{x\to0}\left(\ f(5)\cdot \text{συν}x\cdot g(x)\ \right)=0$

Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση g έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$ (9Μ)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\sqrt{x}-1} & \text{αν} \quad x>1 \\ \beta & \text{αν} \quad x=1\ ,\ \alpha,\beta\in R \\ -x^5-x+4 & \text{αν} \quad x<1 \end{cases}$

Γνωρίζουμε ότι αυτή είναι συνεχής στο $D=\left[1,+\infty\right)$

Γ₁. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{αν} \quad x\ge1 \\ -x^5-x+4 & \text{αν} \quad x<1 \end{cases}$ (7Μ)

Γ₂. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο R (5Μ)

Γ₃. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f\left(R\right)=[2,+\infty)$ (7Μ)

Γ₄. Να βρείτε τον $m<25$, ώστε να μην ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Ε. Τ. για την f στο $\left[m,25\right]$ (6Μ)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $f:R\to R$, με $f(R)=\left(-1,1\right)$

Ισχύει το Θ. Bolzano για την f στο διάστημα $[0,2]$, αλλά δεν ισχύει στο $[0,1]$

Έστω και η συνάρτηση $g:R\to R$, ώστε $g(x)=f(x)+e^x-1$

Δ₁. Να αποδείξετε ότι η f έχει μία ακριβώς ρίζα r και μάλιστα $r\in[1,2)$ (5Μ)

Δ₂. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y=-2x+3$ σε ένα μόνο σημείο $M\left(x_o,y_o\right)$ και μάλιστα $1<x_o<2$ (6Μ)

Δ₃. Να αποδείξετε ότι $g(R)=\left(-2,+\infty\right)$ (6Μ)

Δ₄. Να αποδείξετε ότι **α.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{g(x)}{g(x)+2}\right)=-\infty$ **β.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{g(x)+2}\right)=1$ (8Μ)

Α ΘΕΜΑ

A₁. Σελίδα: 076

A₂. **α** Αν η $f+g$ ήταν συνεχής επειδή και f είναι συνεχής και η διαφορά τους $(f+g)-f=g$ θα ήταν συνεχής. Άτοπο

β $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0\neq 1$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0\neq -1$, όμως $\lim\limits_{x\to 0}(f+g)(x)=0=(f+g)(0)$

A₃. Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής σε διάστημα
αν δεν είναι σταθερή, το σύνολο τιμών της θα είναι διάστημα
ή όταν είναι σταθερή θα είναι μονοσύνολο.

A₄. Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα
αν δεν είναι σταθερή, το σύνολο τιμών της θα είναι κλειστό διάστημα
ή όταν είναι σταθερή θα είναι μονοσύνολο.

A₅. Η f είναι συνεχής στο R^*, με $f(x)=\frac{1}{x}<0$, αν $x<0$, $f(x)=\frac{1}{x}>0$, αν $x>0$

A₆. Λ , αφού το D δεν γνωρίζουμε αν είναι διάστημα.

Β ΘΕΜΑ

B₁. $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}\left(\alpha^2 \ln(x-5+e)+2(\alpha+1)\cdot e^{5-x}\right)=\alpha^2+2\alpha+2$

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(x^2-8x+16\right)=1$

Θέλουμε $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=f(5) \Leftrightarrow (\alpha+1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$

B₂. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln(x-5+e)\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} \ln y=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x-5+e)=+\infty$

B₃. $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(0)\cdot g(x)\right)+\lim\limits_{x\to 0}\left(f(5)\cdot \text{συν}x\cdot g(x)\right)=0$

$\Leftrightarrow f(0)\cdot\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)\right)+f(5)\lim\limits_{x\to 0}(\text{συν}x)\lim\limits_{x\to 0}\left(g(x)\right)=0 \Leftrightarrow g(0)=-16\cdot g(1)$

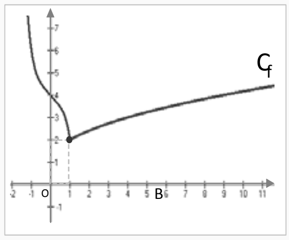
Οπότε $g(0)g(1)\leq 0$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,1]$, με βάση το Θ.Bolzano, διαπιστώνουμε ότι αυτή έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$

Γ ΘΕΜΑ

Γ1. Πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x-\alpha}{\sqrt{x}-1}\right)=\beta$ και καταλήγουμε ότι $\alpha=1$

και μετά από $\beta=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right)$ καταλήγουμε ότι $\beta=2$



Οπότε $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+1 & \text{αν} \quad x\ge 1\\ -x^5-x+4 & \text{αν} \quad x<1\end{cases}$

Γ2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=0$ και η f είναι συνεχής στο 1

Επίσης, η f είναι συνεχής στα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$

Γ3. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $D_1=(-\infty,1)$, με $f\left(D_1\right)=(2,+\infty)$

και γνησίως φθίνουσα στο $D_2=[1,+\infty)$, με $f\left(D_2\right)=[2,+\infty)$

και άρα $f\left(R\right)=[2,+\infty)$

Γ4. Θέλουμε $f(m)=f(25) \Leftrightarrow$ Αν $m\ge 1$, είναι $m=25$ Άτοπο

Αν $m<1$ και $m^5+m+2=0 \Leftrightarrow m=-1$

αφού η συνάρτηση $r(x)=x^5+x+2$ είναι γνησίως αύξουσα με $r(-1)=0$

Δ ΘΕΜΑ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ και άρα και στο $[0,1]$ και $f(0)f(2)<0$

Πρέπει τελικά $f(0)f(1)\ge 0$ και καταλήγουμε ότι για τη ρίζα r είναι $r\in[1,2)$

Δ2. Η $F(x)=f(x)+2x-3$ είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει το Θ. Bolzano στο $[1,2]$

Οπότε, η $(\varepsilon): y=-2x+3$ τέμνει την C_f μόνο στο $M\left(x_o,y_o\right)$, με $1<x_o<2$

Δ3. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

και επειδή $f(R)=\left(-1,1\right)$ είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

Η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, οπότε $g(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right)$

και καταλήγουμε ότι $g(R)=\left(-2,+\infty\right)$

Δ4. **α.** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{g(x)}{g(x)+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{g(x)+2}\right)=(-2)(+\infty)=-\infty$, $g(x)+2>0$

β. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{g(x)}{g(x)+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{g(x)}}\right)=1$