1ο ΓΕΛ ΑΛΕΞ / ΠΟΛΗΣ 17 / 12 / 2019

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΟΡΙΑ — ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ....

ΘΕΜΑ Α :

Α 1 . Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$. Αν :

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha , \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε , να αποδείξετε ότι , για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας , τουλάχιστον $\chi_0 \in (\alpha , \beta)$ τέτοιος , ώστε $f(\chi_0) = \eta$. **(10 Μονάδες)**

Α2 . Να διατυπώσετε την γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano . **(5 Μονάδες)**

Α3 . Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$;

(5 Μονάδες)

Α4 . Θεωρούμε τους παρακάτω ισχυρισμούς :

(I) « Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται σε ένα διάστημα που περιέχει το χ_0 και η συνάρτηση $f+g$ είναι συνεχής στο χ_0, τότε και οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο χ_0 .»

(II) « Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα .»

Να εξετάσετε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι αληθείς ή ψευδείς και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας . **(15 Μονάδες)**

Α5 . Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές **(Σ)** ή λανθασμένες **(Λ)** .

(i) Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$, τότε θα είναι συνεχής και στα σημεία $\chi_1 = \alpha$, $\chi_2 = \beta$.

(ii) Αν για μια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ ισχύει $f(\chi) \neq 0$, για κάθε $\chi \neq 0$, τότε η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

(iii) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε η συνάρτηση f θα παίρνει υποχρεωτικά όλες τις ενδιάμεσες τιμές της ανάμεσα στα $f(\alpha)$ και $f(\beta)$

(iv) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα (α , β) και ισχύουν : $\lim\limits_{\chi \to \alpha^+} f(\chi) = f(\alpha)$, $\lim\limits_{\chi \to \beta^-} f(\chi) = f(\beta)$, τότε η συνάρτηση f παίρνει υποχρεωτικά μια μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[\alpha , \beta]$.

v) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha , \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε θα ισχύει $f(\chi) \neq 0$, για κάθε $\chi \in [\alpha , \beta]$. **(15 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β :

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(\chi)=\begin{cases} e^{\chi}-\alpha & , \text{ αν } \chi<0 \\ \ell n(\chi+1)+\beta , & \text{ αν } \chi\geq 0 \end{cases}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{Z}$

για την οποία ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1 , e-1]$.

Β1 . Να αποδείξετε ότι : $\alpha=1$ και $\beta=0$. **(8 Μονάδες)**

Β2 . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της . **(5 Μονάδες)**

Β3 . Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . **(8 Μονάδες)**

Β4 . Να χαράξετε στην κόλα σας με στυλό μία πρόχειρη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . **(4 Μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ :

Θεωρούμε μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι παρακάτω υποθέσεις :

- Είναι πολυωνυμική βαθμού $\nu\in\mathbb{N}^*$
- $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\dfrac{f(\chi)}{\chi^3\cdot\eta\mu\left(\dfrac{1}{\chi}\right)}=1$
- $f(\chi)=f(1-\chi)$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$
- η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $M\left(\dfrac{1}{2} , -\dfrac{1}{4}\right)$.

Γ1 . Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(\chi)=\chi^2-\chi$, $\chi\in\mathbb{R}$.

(8 Μονάδες)

Γ2 . Να υπολογίσετε , εάν υπάρχει , το όριο : $\lim\limits_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{f(\chi)}-\eta\mu\chi\right)$. **(6 Μονάδες)**

Γ3 . Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(0 , 2)$ τέτοιο , ώστε να ισχύει :

$f(\chi_0)=e\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{12}$. **(5 Μονάδες)**

Γ4 . Να βρείτε τον τύπο μιας συνεχούς και ορισμένης στο διάστημα $[1 , +\infty)$ συνάρτησης g , για την οποία ισχύουν $(f\circ g)(\chi)=\chi$, για κάθε $\chi\in[1 , +\infty)$ και $g(2)>1$. **(6 Μονάδες)**

ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

(ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ — ΟΡΙΑ — ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

ΘΕΜΑ Α :

Α 1 . Απόδειξη βιβλίου του Θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών σελ. 76

Α2 . Θεωρία βιβλίου σελ. 74 (πάνω από το θεώρημα Bolzano)

Α3 . Ορισμός βιβλίου σελ. 73

Α4 . Ο ισχυρισμός **(Ι)** είναι λανθασμένος , διότι αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις

$f:f(\chi)=\begin{cases}-1\ ,\ \chi\geq 0\\ 1\ ,\ \chi<0\end{cases}$ και $g:g(\chi)=\begin{cases}1\ ,\ \chi\geq 0\\ -1\ ,\ \chi<0\end{cases}$, τότε , ούτε η f ούτε η g είναι συνεχής

στο $\chi_0=0$ (τα πλευρικά τους όρια είναι διαφορετικά) , ενώ η συνάρτηση $f+g$ με τύπο $(f+g)(\chi)=0$ είναι συνεχής στο $\chi_0=0$, ως σταθερή .

Ο ισχυρισμός **(ΙΙ)** είναι λανθασμένος , διότι αν θεωρήσουμε τη σταθερή συνάρτηση $f:f(\chi)=\alpha\ ,\ \alpha\in\mathbb{R}$ στο διάστημα $\Delta=[0\ ,\ 1]$, η εικόνα της $f(\Delta)=\alpha$ είναι μονοσύνολο κι όχι διάστημα .

Α5 . (i) Λ (π.χ η συνάρτηση $f:f(\chi)=\begin{cases}\chi+1\ ,\ \chi\in(-\infty\ ,\ 0)\cup(1\ ,+\infty)\\ \chi\ \ ,\ \chi\in[0\ ,\ 1]\end{cases}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0\ ,\ 1]$ ως πολυωνυμική , αλλά δεν είναι στα σημεία $\chi_1=0$ και $\chi_2=1$)

(ii) Λ (π.χ η συνάρτηση $f:f(\chi)=\begin{cases}-1\ ,\ \chi>0\\ 1\ ,\ \chi<0\end{cases}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$, $f(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\neq 0$, αλλά η f δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.)

(iii) Σ (διότι θα ισχύει το θεώρημα Bolzano , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(\alpha\ ,\ \beta)$: $f(\chi_0)=0$ και επειδή από τη σχέση $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ προκύπτει $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και επειδή $f(\alpha)<0<f(\beta)$ ή $f(\beta)<0<f(\alpha)$, τότε ισχύει το Θ.Ε.Τ)

(iv) Σ (διότι αν ισχύουν οι υποθέσεις του ερωτήματος **(iv)** η συνάρτηση f θα είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha\ ,\ \beta]$, οπότε θα ισχύει το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής .)

v) Λ (π.χ η συνάρτηση $f:f(\chi)=\chi^2$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-1\ ,\ 1]$ και ισχύει : $f(-1)\cdot f(1)=1>0$, αλλά η συνάρτηση f μηδενίζεται για $\chi=0\in[-1\ ,\ 1]$.)

ΘΕΜΑ Β :

Β1 . Αφού για τη συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano

στο διάστημα $[-1\ ,\ e-1]$, άρα η f θα είναι συνεχής στο $[-1\ ,\ e-1]$. Η f είναι συνεχής στο $(-1\ ,\ 0)\cup(0\ ,\ e-1)$ ως άθροισμα και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων , άρα η f πρέπει να είναι συνεχής και στο $\chi_0=0$. Θα ισχύει λοιπόν : $\lim\limits_{\chi\to 0^-}f(\chi)=\lim\limits_{\chi\to 0^+}f(\chi)=f(0)\Leftrightarrow 1-\alpha=\beta\ \ (1)$.

Θα ισχύει επίσης : $f(-1)\cdot f(e-1)<0\Leftrightarrow\left(\dfrac{1}{e}-\alpha\right)\cdot(1+\beta)<0\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left(\dfrac{1}{e}+\beta-1\right)\cdot(1+\beta)<0$.

Η λύση της παραπάνω ανίσωσης μας οδηγεί στο συμπέρασμα $-1<\beta<1-\frac{1}{e}<1 \overset{\beta\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow} \beta=0$, από την (1) έχουμε : $\alpha=1$.

Β2 . Με $\alpha=1$, $\beta=0$, η συνάρτηση f έχει τύπο : $f(\chi)=\begin{cases} e^{\chi}-1 & ,\ \alpha\nu\ \chi<0 \\ \ell n(\chi+1) & ,\ \alpha\nu\ \chi\geq 0 \end{cases}$.

Για κάθε χ_1 , $\chi_2\in(-\infty\ ,0)$ με $\chi_1<\chi_2 \Rightarrow e^{\chi_1}<e^{\chi_2} \Rightarrow e^{\chi_1}-1<e^{\chi_2}-1 \Rightarrow f(\chi_1)<f(\chi_2)$, άρα η $f\nearrow(-\infty,0)$. Για κάθε χ_1 , $\chi_2\in[0\ ,+\infty)$ με $\chi_1<\chi_2 \Rightarrow \chi_1+1<\chi_2+1 \Rightarrow \ell n(\chi_1+1)<\ell n(\chi_2+1) \Rightarrow f(\chi_1)<f(\chi_2)$, άρα η $f\nearrow[0\ ,+\infty)$.

Για κάθε $\chi_1\in(-\infty\ ,0)$, $\chi_2\in[0\ ,+\infty)$ με $\chi_1<\chi_2$, έχουμε : $\chi_1<0 \Rightarrow e^{\chi_1}<e^0=1 \Rightarrow f(\chi_1)<0$, ενώ $\chi_2\geq 0 \Rightarrow \chi_2+1\geq 1 \Rightarrow \ell n(\chi_2+1)\geq \ell n1=0 \Rightarrow f(\chi_2)\geq 0$, άρα $f(\chi_1)<f(\chi_2)$, δηλαδή για κάθε χ_1 , $\chi_2\in\mathbb{R}$ με $\chi_1<\chi_2 \Rightarrow f(\chi_1)<f(\chi_2)$, δηλαδή $f\nearrow\mathbb{R}$.

Η συνεχής $f\nearrow(-\infty\ ,0)$ έχει σύνολο τιμών :

$f((-\infty\ ,0))=\left(\lim\limits_{\chi\to-\infty} f(\chi)\ ,\ \lim\limits_{\chi\to 0^-} f(\chi)\right)=(-1\ ,\ 0)$, αφού $\lim\limits_{\chi\to-\infty} e^{\chi}=0$.

Η συνεχής $f\nearrow[0\ ,+\infty)$ έχει σύνολο τιμών : $f([0\ ,+\infty))=\left[f(0), \lim\limits_{\chi\to+\infty} f(\chi)\right)=[0\ ,+\infty)$,

αφού $\lim\limits_{\chi\to+\infty} \ell n(\chi+1) \overset{u=\chi+1\to+\infty}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} \ell nu=+\infty$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f((-\infty\ ,0))\cup f([0\ ,+\infty))=(-1\ ,0)\cup[0\ ,+\infty)=(-1\ ,+\infty)$.

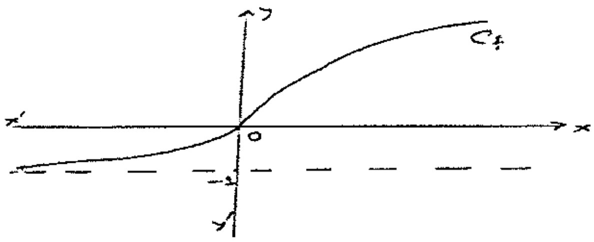
Β3 . Η συνάρτηση $f\nearrow\mathbb{R}$, άρα f $1-1$, οπότε αντιστρέφεται . Για κάθε $\chi\in(-\infty\ ,0)$, θέτουμε $f(\chi)=\psi \Rightarrow e^{\chi}-1=\psi \Rightarrow e^{\chi}=\psi+1 \Rightarrow \chi=\ell n(\psi+1) \Rightarrow f^{-1}(\chi)=\ell n(\chi+1)$.

Για κάθε $\chi\in[0\ ,+\infty)$, θέτουμε $f(\chi)=\psi \Rightarrow \ell n(\chi+1)=\psi \Rightarrow e^{\psi}=\chi+1 \Rightarrow \chi=e^{\psi}-1 \Rightarrow f^{-1}(\chi)=e^{\chi}-1$.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα παίρνουμε :

$$f^{-1}(\chi)=\begin{cases} e^{\chi}-1 & ,\ \alpha\nu\ \chi\geq 0 \\ \ell n(\chi+1) & ,\ \alpha\nu\ -1<\chi<0 \end{cases}.$$

B4 . Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται στο διπλανό σχήμα .



ΘΕΜΑ Γ :

Γ1 . Αφού η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική βαθμού $\nu \in \mathbb{N}^*$, θα είναι της μορφής :

$$f(\chi)=\alpha_\nu\cdot\chi^\nu+\alpha_{\nu-1}\cdot\chi^{\nu-1}+\ldots\ldots+\alpha_1\cdot\chi+\alpha_0$$

(1) , όπου α_ν , $\alpha_{\nu-1}$, ……, α_1 , $\alpha_0\in\mathbb{R}$, με

$\alpha_\nu\neq 0$. Επίσης έχουμε :

$$\lim_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi^3\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi}\right)}=1\Rightarrow\lim_{\chi\to+\infty}\left(\frac{f(\chi)}{\chi^2}\cdot\frac{1}{\chi\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi}\right)}\right)=1$$. Θέτουμε $g(\chi)=\frac{f(\chi)}{\chi^2}\cdot\frac{1}{\chi\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi}\right)}$,

άρα $\lim\limits_{\chi\to+\infty}g(\chi)=1$, όπου παίρνουμε : $\frac{f(\chi)}{\chi^2}=g(\chi)\cdot\left(\chi\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi}\right)\right)$.

Έχουμε : $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left(\chi\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi}\right)\right)\overset{\frac{1}{\chi}=u\to0^+}{=}\lim\limits_{u\to0^+}\frac{\eta\mu u}{u}=1$, άρα

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\left[g(\chi)\cdot\left(\chi\cdot\eta\mu\left(\frac{1}{\chi}\right)\right)\right]=1$, οπότε από τη σχέση (1) παίρνουμε :

$\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi^2}=\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\alpha_\nu\cdot\chi^\nu}{\chi^2}=1\Rightarrow\alpha_\nu\cdot\lim\limits_{\chi\to+\infty}\chi^{\nu-2}=1$.

Αν $\nu>2$, το παραπάνω όριο ισούται με $+\infty$, αν $\alpha_\nu>0$ ή $-\infty$, αν $\alpha_\nu<0$, άτοπο , αφού το παραπάνω όριο ισούται με 1 .

Αν $0<\nu<2\Rightarrow\nu=1$, το παραπάνω όριο ισούται με 0 , άτοπο .

Άρα αναγκαστικά $\nu=2$ και $\alpha_\nu=1$, οπότε η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού

της μορφής $f(\chi)=\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma$, όπου β , $\gamma\in\mathbb{R}$.

Επειδή ισχύει : $f(\chi)=f(1-\chi)$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, θα έχουμε :

$$\chi^2+\beta\cdot\chi+\gamma=(1-\chi)^2+\beta\cdot(1-\chi)+\gamma\Rightarrow\chi^2+\beta\cdot\chi=1+\chi^2-2\cdot\chi+\beta-\beta\cdot\chi\Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\cdot(1+\beta)\cdot\chi=1+\beta$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}$, άρα $\beta=-1$.

Έχουμε : $f(\chi)=\chi^2-\chi+\gamma$ και επειδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται

από το σημείο $M\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$, θα ισχύει :

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\gamma=-\frac{1}{4}\Rightarrow-\frac{1}{4}+\gamma=-\frac{1}{4}\Rightarrow\gamma=0$, οπότε τελικά ο τύπος της συνάρτησης f γίνεται : $f(\chi)=\chi^2-\chi$.

Γ2 . Έχουμε :

$$\lim_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{f(\chi)}-\eta\mu\chi\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{\chi^2-\chi}-\eta\mu\chi\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\left(\sqrt{\chi^2\cdot\left(1-\frac{1}{\chi}\right)}-\eta\mu\chi\right)\overset{\chi<0}{=}$$

$$=\lim_{\chi\to-\infty}\left(-\chi\cdot\sqrt{1-\frac{1}{\chi}}-\eta\mu\chi\right)=\lim_{\chi\to-\infty}\left[-\chi\cdot\left(\sqrt{1-\frac{1}{\chi}}+\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\right)\right]=\ell\ .$$

Επειδή $\lim_{\chi\to-\infty}(-\chi)=+\infty$, $\lim_{\chi\to-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{\chi}}=1$, αφού $\lim_{\chi\to-\infty}\frac{1}{\chi}=0$ και $\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\eta\mu\chi}{\chi}=0$,

αφού από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει : $-\frac{1}{\chi}\le\frac{\eta\mu\chi}{\chi}\le\frac{1}{\chi}$, για κάθε $\chi\in\mathbb{R}^*$, τότε :

$\ell=+\infty$.

Γ3 . Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0\ ,\ 2]$ ως πολυωνυμική με $f(0)=0\ne f(2)=2$. Επίσης έχουμε : $(0\ ,\ 2)\subseteq(0\ ,\ \pi)$ και συνχ $\searrow(0\ ,\ \pi)$, άρα

$$\frac{5\pi}{12}>\frac{\pi}{3}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\Rightarrow0<e\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}<\frac{e}{2}<2\ \ (e\cong2,7)$$, άρα από το

θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $\chi_0\in(0\ ,\ 2)$: $f(\chi_0)=e\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{12}$.

Γ4 . Ισχύει :

$$(f\circ g)(\chi)=\chi\Rightarrow f(g(\chi))=\chi\Rightarrow g^2(\chi)-g(\chi)=\chi\Rightarrow g^2(\chi)-g(\chi)+\frac{1}{4}=\chi+\frac{1}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(g(\chi)-\frac{1}{2}\right)^2=\chi+\frac{1}{4}\ ,\ \chi\ge1\ \ (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h:h(\chi)=g(\chi)-\frac{1}{2}$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[1\ ,+\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων , οπότε η σχέση (1) γίνεται : $h^2(\chi)=\chi+\frac{1}{4}$. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $\chi_0\in[1\ ,+\infty)$: $h(\chi_0)=0$, από τη σχέση (1) για $\chi=\chi_0$, παίρνουμε : $h^2(\chi_0)=\chi_0+\frac{1}{4}\Rightarrow0=\chi_0+\frac{1}{4}\Rightarrow\chi_0=-\frac{1}{4}\notin[1\ ,+\infty)$, το οποίο είναι άτοπο , άρα $h(\chi)\ne0$, για κάθε $\chi\in[1\ ,+\infty)$, οπότε από συνέπεια Θεωρήματος Bolzano η συνάρτηση h θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[1\ ,+\infty)$.

Έχουμε $h:h(2)=g(2)-\frac{1}{2}>1-\frac{1}{2}>0$, άρα $h(\chi)>0$ για κάθε $\chi\in[1\ ,+\infty)$, οπότε

$$h(\chi)=\sqrt{\chi+\frac{1}{4}}\Rightarrow g(\chi)=\sqrt{\chi+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\ ,\ \chi\in[1\ ,+\infty)\ .$$