Επαναληπτικό διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στο 1ο κεφάλαιο
(Συναρτήσεις – Όρια – Συνέχεια – Θεωρήματα Συνέχειας)

Θέμα Α

Α1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

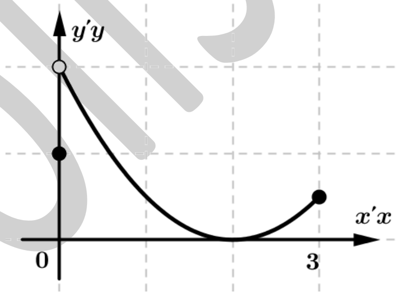
4 μονάδες

Α2. α) Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή:
«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ αν $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$ τότε ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=0$ »

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α) αποδεικνύοντάς τον ισχυρισμό αν είναι Αληθής ή δίνοντας ένα αντιπαράδειγμα αν είναι ψευδής.

$1+4=5$ μονάδες

Α3. Να αναφέρετε αν η συνάρτηση του σχήματος είναι συνεχής στο $(0,3]$ και ισχύει το συμπέρασμα του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[0,3]$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



6 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή ή Λάθος.

α) Για κάθε συνάρτηση f που το μηδέν ανήκει στο σύνολο τιμών, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της f.

β) Για κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

γ) Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο xο τότε κατ' ανάγκη η σύνθεση της f με την g είναι συνεχής στο xο.

δ) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x+1\,,\ x>0 \\ x-1\,,\ x<0 \end{cases}$ είναι συνεχής.

ε) Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει ρίζα στο $\mathbb{R}$.

$2\times 5=10$ μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-\alpha & ,\ x<0 \\ \sqrt{x} & ,\lambda-1\le x\le\lambda \\ \beta-x^3 & ,\ x>1 \end{cases}$ με $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $\lambda=1$.

5 μονάδες

Β2. Για $\alpha=0$ και για $\beta=3$, να εξετάσετε αν ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[0,1]$. Τι παρατηρείτε σχετικά με την συνέχεια της f στο $x_1=0$ και στο $x_2=1$;

4 μονάδες

Β3. Να βρείτε τα $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4 μονάδες

Για $\alpha = 0$ και $\beta = 2$:

Β4. Αν $g(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$ να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$.

6 μονάδες

Αν για $x \in [0,1]$ είναι $(g \circ f)(x) = \eta\mu\sqrt{x}$ τότε:

Β5. Αν $(h \circ g \circ f)(x) = \left|\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\right|$, $0 \le x \le 1$ να βρείτε την συνάρτηση h.

6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\left(f(x)-1\right)^2 = (x-1)^6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $f(2020) = -2019^3 + 1$ και $f(-2020) = 2021^3 + 1$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^3 + 1,\ x \in \mathbb{R}.$

7 μονάδες

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

5 μονάδες

Γ3. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x-\lambda} = -3$.

7 μονάδες

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3 - 2x^4$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-1,1)$.

6 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 - 3x^2 + \beta x - 1,\ x \in \mathbb{R}$, με $\alpha \neq 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha > 0$.

6 μονάδες

Δ2. Να δείξετε ότι $\alpha\beta > \dfrac{9}{4}$.

7 μονάδες

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha > 0$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,2)$.

6 μονάδες

Δ4. Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(f(x))}{x^9} = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^3} = 1$. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 3$.

6 μονάδες

Ευχόμαστε κάθε επιτυχία!

Στέλιος Μιχαήλογλου – Νίκος Τούντας

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$,τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

Α2. α) Ψευδής

β) Αν $f(x) = \frac{1}{x^2}, x > 0$ και $g(x) = -\frac{1}{x^4}, x > 0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ όμως $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{x^4} = -\infty$.

(Βλέπε σχολικό βιβλίο σελίδα 62)

Α3. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,3)$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = f(3)$ είναι συνεχής στο $(0,3]$. Επίσης για κάθε η μεταξύ των $f(0)$ και $f(3)$ υπάρχει πάντα τουλάχιστον ένα $xo \in (0,3)$: $f(xo) = \eta$, δηλαδή η f παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(0)$ και $f(3)$. Άρα ισχύει το συμπέρασμα του ΘΕΤ στο $[0,3]$ παρόλο που δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του.

Α4. α) Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

Θέμα Β

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha & , x < 0 \\ \sqrt{x} & ,\lambda - 1 \le x \le \lambda \\ \beta - x^3 & , x > 1 \end{cases}$$

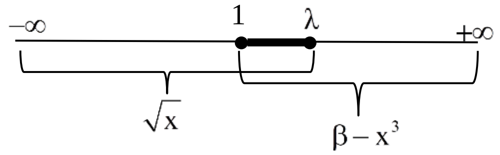
Β1. Επειδή η f είναι συνάρτηση πρέπει κάθε x να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνον $y = f(x)$.

Ο τύπος $f(x) = x^2 - \alpha$ ορίζεται στο διάστημα $(-\infty, 0)$, ο τύπος $f(x) = \sqrt{x}$ ορίζεται στο διάστημα $[\lambda - 1, \lambda]$ και ο τύπος $f(x) = \beta - x^3$ ορίζεται στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Πρώτα από όλα ο τύπος $f(x) = \sqrt{x}$ θα πρέπει να ορίζεται σε υποσύνολο του $[0, +\infty)$ γιατί πρέπει $x \ge 0$.

Άρα πρώτα από όλα πρέπει $[\lambda - 1, \lambda] \subseteq [0, +\infty)$ δηλαδή $\lambda - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \lambda \ge 1$.

Τώρα αν $\lambda > 1$, τότε για να είναι η f συνάρτηση πρέπει οι τύποι $f(x) = \sqrt{x}$ και $f(x) = \beta - x^3$ να είναι ίσοι για κάθε τιμή του x στο διάστημα $[1, \lambda]$.



Δηλαδή πρέπει $\sqrt{x} = \beta - x^3$ για κάθε $x \in [1, \lambda]$

Έστω η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x} + x^3 - \beta$, $x \in [1, \lambda]$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, \lambda]$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} & (A) \\ x_1^3 + \beta < x_2^3 + \beta & (B) \end{cases} \overset{(A)+(B)}{\Rightarrow} g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow [1, \lambda]$

Δηλαδή η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}+x^3-\beta=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=\beta-x^3$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $[1,\lambda]$ άρα δεν ισχύει $\sqrt{x}=\beta-x^3$ για κάθε $x\in[1,\lambda]$. Επομένως πρέπει $\lambda\le 1$. Είναι όμως και $\lambda\ge 1$ άρα τελικά $\lambda=1$.

Άρα η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\begin{cases} x^2-\alpha &, x<0 \\ \sqrt{x} &, 0\le x\le 1 \\ \beta-x^3 &, x>1 \end{cases}$.

B2. Η f γίνεται $f(x)=\begin{cases} x^2 &, x<0 \\ \sqrt{x} &, 0\le x\le 1 \\ 3-x^3 &, x>1 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο $(0,1)$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0=f(0)$ και $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x}=1=f(1)$ άρα τελικά η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης ισχύει $f(0)=0\neq f(1)=1$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών στο $[0,1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2=0=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ άρα η f είναι συνεχής στο 0 και είναι

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(3-x^3)=2\neq f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ άρα η f δεν είναι συνεχής στο 1.

Δηλαδή παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ όμως δεν είναι συνεχής και στο 1.

B3. Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,1)$ και $(1,+\infty)$.

Πρέπει επίσης να είναι συνεχής στο $x_1=0$ και στο $x_2=1$.

Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-\alpha)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\Rightarrow \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-\alpha)=0\Leftrightarrow -\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=0$.

Επίσης πρέπει $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}(\beta-x^3)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1\Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-}(\beta-x^3)=1\Leftrightarrow \beta-1=1\Leftrightarrow \beta=2$

Άρα η f γίνεται $f(x)=\begin{cases} x^2 &, x<0 \\ \sqrt{x} &, 0\le x\le 1 \\ 2-x^3 &, x>1 \end{cases}$

B4. Αν $f(x)=x^2$, $x<0$ τότε για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει:

$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x<0 \\ x^2\in\mathbb{R} \end{cases}\Leftrightarrow x<0$ δηλαδή είναι $(g\circ f)(x)=g(f(x))=\eta\mu x^2$, $x<0$.

Αν $f(x)=\sqrt{x}$, $0\le x\le 1$ τότε για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει:

$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 1$ δηλαδή είναι

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\eta\mu\sqrt{x}\ ,\ 0\le x\le 1.$$

Αν $f(x)=2-x^3$, $x>1$ τότε για να ορίζεται η $g\circ f$ πρέπει:

$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_g \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}\Leftrightarrow x>1$ δηλαδή είναι

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\eta\mu(2-x^3)\ ,\ x>1.$$

Άρα τελικά $(g\circ f)(x)=\begin{cases} \eta\mu x^2 & , x<0 \\ \eta\mu\sqrt{x} & , 0\le x\le 1 \\ \eta\mu(2-x^3) & , x>1 \end{cases}$.

B5. $(h\circ g\circ f)(x)=h(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}|=\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2(\sqrt{x})}=\sqrt{1-\eta\mu^2(\sqrt{x})}$, $0\le x\le 1$ (1)

Αν $(g\circ f)(x)=u\Leftrightarrow \eta\mu\sqrt{x}=u$

Είναι $0\le x\le 1\overset{\sqrt{x}\nearrow}{\Leftrightarrow}0\le\sqrt{x}\le 1\overset{\eta\mu x\nearrow}{\Leftrightarrow}0\le\eta\mu\sqrt{x}\le\eta\mu 1\Rightarrow u\in[0,\eta\mu 1]$

Τότε $h(u)=\sqrt{1-u^2}$, $0\le u\le\eta\mu 1$ άρα $h(x)=\sqrt{1-x^2}$, $0\le x\le\eta\mu 1$

Θέμα Γ

Γ1. $(f(x)-1)^2=(x-1)^6\Leftrightarrow|f(x)-1|=\sqrt{(x-1)^6}$. Θέτω $v(x)=f(x)-1, x\in\mathbb{R}$ και ισχύει $v(x)=0\Leftrightarrow|v(x)|=0\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^6}=0\Leftrightarrow x=1$ και επειδή ν συνεχής ως πράξεις συνεχών ισχύει ότι διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν της ρίζας δηλαδή στα διαστήματα $(-\infty,1),(1,+\infty)$ και επειδή:

$v(-2020)=2021^3+1-1=2021^3>0$ η ν είναι θετική στο $(-\infty,1)$ και

$v(2020)=-2019^3+1-1=-2019^3<0$ η ν είναι αρνητική στο $(1,+\infty)$.

Για $x<1$: $|f(x)-1|=\sqrt{(x-1)^6}\Leftrightarrow f(x)-1=-(x-1)^3\Leftrightarrow f(x)=-(x-1)^3+1$

Για $x>1$: $|f(x)-1|=\sqrt{(x-1)^6}\Leftrightarrow -f(x)+1=(x-1)^3\Leftrightarrow f(x)=-(x-1)^3+1$

Για $x=1$: $f(x)-1=0\Leftrightarrow f(x)=1$ άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)=-(x-1)^3+1$.

Γ2. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f είναι 1-1.

1ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2\Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow$

$$\Rightarrow(x_1-1)^3<(x_2-1)^3\Rightarrow-(x_1-1)^3>-(x_2-1)^3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-(x_1-1)^3+1>-(x_2-1)^3+1\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow f\searrow\mathbb{R}$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα 1-1.

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow-(x_1-1)^3+1=-(x_2-1)^3+1\Rightarrow$

$$\Rightarrow-(x_1-1)^3=-(x_2-1)^3\Rightarrow(x_1-1)^3=(x_2-1)^3\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$

Άρα η f είναι 1-1.

Επειδή η f είναι 1-1 τότε αντιστρέφεται.

Άρα για $x\in\mathbb{R}$ θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow-(x-1)^3+1=y\Leftrightarrow(x-1)^3=1-y$

Αν $y\le 1$ τότε $x-1=\sqrt[3]{1-y}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{1-y}+1$

Αν $y>1$ τότε $x-1=-\sqrt[3]{y-1}\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{y-1}+1$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1-x}+1, & x\le 1\\ \sqrt[3]{x-1}+1, & x>1\end{cases}.$$

Γ3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-2}{x-\lambda}=-3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-(x-1)^3+1-2}{x-\lambda}=-3 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3+3x^2-3x}{x-\lambda}=-3$

1ος τρόπος

Έστω $h(x)=\dfrac{-x^3+3x^2-3x}{x-\lambda},\ x\neq\lambda$. Είναι $h(x)(x-\lambda)=-x^3+3x^2-3x \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}\left[h(x)(x-\lambda)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^3+3x^2-3x\right) \Leftrightarrow -3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=0$.

Τότε για $\lambda=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x-\lambda}=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3+3x^2-3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\left(-x^2+3x-3\right)}{\cancel{x}}=-3$$

2ος τρόπος

Αν $\lambda\neq 0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-x^3+3x^2-3x}{x-\lambda}=\dfrac{0}{-\lambda}=0\neq -3$, άρα λ = 0 και στη συνέχεια επαλήθευση.

Γ4. $f(x)=3-2x^4 \Leftrightarrow -x^3+3x^2-3x+2=3-2x^4 \Leftrightarrow 2x^4-x^3+3x^2-3x-1=0$

Έστω $h(x)=2x^4-x^3+3x^2-3x-1,\ x\in[-1,1]$.

Είναι $h(1)=0$, οπότε με σχήμα Horner προκύπτει: $h(x)=(x-1)\left(2x^3+x^2+4x+1\right)$.

Έστω $\varphi(x)=2x^3+x^2+4x+1,\ x\in[-1,1]$.

Είναι $\varphi(-1)=-4,\ \varphi(1)=8$, δηλαδή $\varphi(-1)\varphi(1)<0$ και επειδή η φ είναι συνεχής ως πολυωνυμική, λόγω του Θ.Bolzano υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$. Τότε $h(x_0)=(x_0-1)\varphi(x_0)=0$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $\alpha<0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha x^3-3x^2+\beta x-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\alpha x^3=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha x^3-3x^2+\beta x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\alpha x^3=-\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής, ως πολυωνυμική και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R})=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(+\infty,-\infty)$ που είναι αδύνατο. Οπότε $\alpha>0$.

Δ2. $f(x)=\alpha x^3-3x^2+\beta x-1 \Leftrightarrow f(x)+1=x\left(\alpha x^2-3x+\beta\right)$.

Για $x=0$ είναι $f(0)+1=0 \Leftrightarrow f(0)=-1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f(x)+1\neq 0$ για κάθε $x\neq 0$, άρα $x\left(\alpha x^2-3x+\beta\right)\neq 0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha x^2-3x+\beta\neq 0 \Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 9-4\alpha\beta<0 \Leftrightarrow \alpha\beta>\dfrac{9}{4}$

Δ3. Είναι $f(0)=-1,\ f(2)=8\alpha-12+2\beta-1=8\alpha+2\beta-13$.

Επειδή $\beta>\dfrac{9}{4\alpha}$, είναι $f(2)=8\alpha+2\beta-13>8\alpha+\cancel{2}\dfrac{9}{\cancel{4}^{2}\alpha}-13=\dfrac{16\alpha^2+9-26\alpha}{2\alpha}$,

Αν $f(2)<0$ τότε επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_1=(0,2)$, θα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(A_1)=\left(-1,f(2)\right)$, άρα $f(x)<0$ και η f δεν έχει ρίζα στο $(0,2)$.

Αν $f(2)=0$ τότε επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχει μοναδική ρίζα το 2, οπότε και πάλι δεν έχει ρίζα στο $(0,2)$. Οπότε τελικά πρέπει $f(2)>0 \Leftrightarrow \dfrac{16\alpha^2+9-26\alpha}{2\alpha}>0 \overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow} 16\alpha^2-26\alpha+9>0$ (1).

Το τριώνυμο $16\alpha^2-26\alpha+9$ έχει $\Delta=100$ και ρίζες $\alpha_1=\dfrac{1}{2},\ \alpha_2=\dfrac{9}{8}$, οπότε από $(1)\Rightarrow 0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ ή $\alpha>\dfrac{9}{8}$.

Άρα τελικά πρέπει $\alpha\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{9}{8},+\infty\right)$.

Δ4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(f(x)\right)}{x^9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha f^3(x)-3f^2(x)+\beta f(x)-1}{x^9}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\alpha\left(\dfrac{f(x)}{x^3}\right)^3-3\left(\dfrac{f(x)}{x^3}\right)^2\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{f(x)}{x^3}\dfrac{\beta}{x^6}-\dfrac{1}{x^9}\right]$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^3-3x^2+\beta x-1}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha x^3}{x^3}=\alpha$, οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f\left(f(x)\right)}{x^9}=\alpha\cdot\alpha^3-3\alpha^2\cdot 0+\alpha\cdot 0-0=\alpha^4$. Είναι $\alpha^4=1\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}\alpha=1$

Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{(x-1)^3},\ x\neq 1$ με $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=1$. Τότε $g(x)(x-1)^3=f(x)$ και

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)(x-1)^3=\lim\limits_{x\to 1}f(x)\Leftrightarrow 0=1-3+\beta-1\Leftrightarrow\beta=3$. Τότε $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ και

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^3}=1$.