Ενδεικτικές Λύσεις των θεμάτων των Μαθηματικών στις Πανελλαδικές εξετάσεις 2022 από το Askisopolis

Θέμα Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:
- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, με $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Απόδειξη

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μία παράγουσα της f στο αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.
- Έστω G μία άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$ οπότε $G'(x)=F'(x)$ για κάθε $x\in\Delta$ άρα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0)=0$

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Απάντηση

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $0<\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x)\neq 0$, για όλα τα $x\in(0,1)$, τότε $f(0)\neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2=\mathbb{R}-\{x/\eta\mu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$.

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ge 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Μονάδες 10

Απάντηση

Α4. α) Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Λάθος

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = fog$.

Μονάδες 6

Λύση

Είναι $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$, $x \le 1$ και $g(x) = \sqrt{x}$, $x \ge 0$

Για να ορίζεται η h πρέπει: $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \sqrt{x} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0,1]$

Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $h(x) = (f \circ g)(x) = (g^2(x) - 1)^2 = \left(\sqrt{x}^2 - 1\right)^2 = (x-1)^2$

Β2. Αν $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "$1-1$" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Λύση

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η h είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

1ος τρόπος: Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x) = 2(x-1) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

2ος τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 < x_2$ είναι $x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \Rightarrow (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h(x_1) > h(x_2)$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$ άρα 1-1 άρα αντιστρέφεται.

3ος τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $x_1 \ne x_2$ είναι $x_1 - 1 \ne x_2 - 1$ και $x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0$ άρα

$(x_1 - 1)^2 \ne (x_2 - 1)^2 \Rightarrow h(x_1) \ne h(x_2)$ άρα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

4ος τρόπος: Για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$ με $h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow (x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 \Rightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \overset{x_1, x_2 \in [0,1]}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 1 - x_1 = 1 - x_2 \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ άρα είναι 1-1 άρα αντιστρέφεται.

Στη συνέχεια θα βρούμε την αντίστροφη.

1ος τρόπος (χρειάζεται την μονοτονία):

Η h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα $h\left(\left[0,1\right]\right)=\left[h\left(1\right),h\left(0\right)\right]=\left[0,1\right]$

Για κάθε $x\in\left[0,1\right]$ και $y\in\left[0,1\right]$ έχουμε:

$$y=h\left(x\right)\Leftrightarrow y=\left(x-1\right)^2\Leftrightarrow\left|x-1\right|=\sqrt{y}\overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow}1-x=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$$

Άρα $h^{-1}\left(x\right)=1-\sqrt{x}$, $x\in\left[0,1\right]$

2ος τρόπος: $y=h\left(x\right)\Leftrightarrow y=\left(x-1\right)^2\overset{y\geq 0}{\Leftrightarrow}\left|x-1\right|=\sqrt{y}\overset{x\in[0,1]}{\Leftrightarrow}1-x=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}$

Είναι $0\leq x\leq 1\Leftrightarrow 0\leq 1-\sqrt{y}\leq 1\Leftrightarrow -1\leq-\sqrt{y}\leq 0\Leftrightarrow 0\leq\sqrt{y}\leq 1\Leftrightarrow 0\leq y\leq 1$

Άρα $h^{-1}\left(x\right)=1-\sqrt{x}$, $x\in\left[0,1\right]$

Β3. Έστω $h^{-1}\left(x\right)=1-\sqrt{x}$, $x\in\left[0,1\right]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}\left(x\right)}{1-x} & ,x\in\left[0,1\right)\\ \dfrac{1}{2} & ,x=1\end{cases}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $\left[0,1\right]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(0,1\right)$ τέτοιο ώστε $\varphi\left(x_0\right)=ημα$, όπου $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

Λύση

i) Η φ είναι συνεχής στο $\left[0,1\right)$ ως πηλίκο συνεχών και $\lim\limits_{x\to 1^{-1}}\varphi\left(x\right)=\varphi\left(1\right)$ αφού:

1ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}{\left(1-x\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\cancel{1-x}}{\cancel{\left(1-x\right)}\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

2ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

Άρα είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$ και $\varphi\left(0\right)=1\neq\varphi\left(1\right)=\dfrac{1}{2}$ άρα ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών.

ii) Είναι $0<\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2} \overset{\eta\mu x \nearrow \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow} \frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1 \Leftrightarrow \varphi(0)<\eta\mu\alpha<\varphi(1)$ άρα από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι: $f'(x)=\begin{cases} -2 & ,x<-1 \\ 3x^2-1 & ,x>-1 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases} -2x-2 & ,x\le -1 \\ x^3-x & ,x>-1 \end{cases}$.

Μονάδες 6

Λύση

Για κάθε $x<-1$ έχουμε $f'(x)=-2 \Leftrightarrow f'(x)=(-2x)'$

Η f και είναι συνεχής στο $(-\infty,1]$ επομένως $f(x)=-2x+c_1$ για κάθε $x\le -1$

Για κάθε $x>-1$ έχουμε $f'(x)=3x^2-1 \Leftrightarrow f'(x)=(x^3-x)'$

Η f είναι συνεχής στο $(-1,+\infty)$ επομένως $f(x)=x^3-x+c_2$ για κάθε $x>-1$.

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχουμε $f(0)=0 \Leftrightarrow c_2=0$

Η f είναι συνεχής στο -1 άρα $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \Leftrightarrow c_1=-2$

Επομένως έχουμε $f(x)=\begin{cases} -2x-2 & ,x\le -1 \\ x^3-x & ,x>-1 \end{cases}$

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

Μονάδες 5

Λύση

Για $x_0>-1$ έχουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α έχει εξίσωση $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

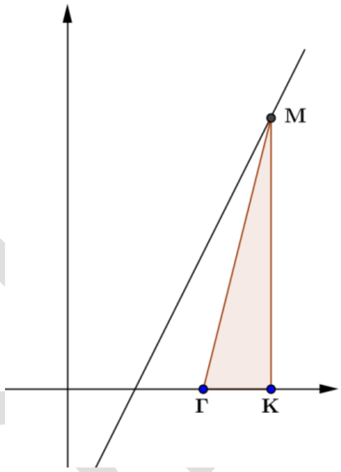
Επειδή διέρχεται από το $(0,-2)$ έχουμε: $-2-x_0^3+x_0=-3x_0^2+x_0 \Leftrightarrow x_0^3=1 \Leftrightarrow x_0=1$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y=2x-2$.

Γ3. Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου $MK\Gamma$, όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2,0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3,4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Λύση



Είναι $M\left(x(t),y(t)\right)$ με $y(t)=2x(t)-2$ και $x(t)>2$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(t)=\dfrac{(\Gamma K)(MK)}{2}=\dfrac{\left(x(t)-2\right)\cdot y(t)}{2}=2$

$=\dfrac{\left(x(t)-2\right)\left(2x(t)-2\right)}{2}=\left(x(t)-2\right)\left(x(t)-1\right)=x^2(t)-3x(t)+2$

Επομένως $E'(t)=2x(t)x'(t)-3x'(t)$.

Είναι $x(t_0)=3$ και $x'(t_0)=2$.

Άρα έχουμε $E'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=12-6=6$ μονάδες/sec

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

Μονάδες 8

Λύση

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

Επομένως έχουμε: $\left|\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|=\dfrac{\left|\eta\mu f(x)\right|}{\left|f(x)\right|}\le\dfrac{1}{\left|f(x)\right|}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{\left|f(x)\right|}\le\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\dfrac{1}{\left|f(x)\right|}$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{\left|f(x)\right|}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{\left|f(x)\right|}\right)=0$ άρα από κριτήριο παρεμβολής είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\underset{\substack{x\to-\infty\\u\to+\infty}}{\overset{u=-x}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{f(u)}{u^3+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3-u}{u^3+1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^3}{u^3}=1.$

Επομένως έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0+1=1$

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1<1<x_2$.

(μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Λύση

i) 1^{ος} τρόπος: Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=1-\dfrac{3}{3x}=\dfrac{x-1}{x}$

Για κάθε $x\in(0,1)$ έχουμε $f'(x)<0$ και αφού f συνεχής στο $(0,1]$ τότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.
Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε $f'(x)>0$ και αφού f συνεχής στο $[1,+\infty)$ τότε είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Επειδή f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ είναι:

$$f((0,1])=\left[f(1),\lim_{x\to 0^+}f(x)\right)=\left[\ln\frac{e}{3},+\infty\right) \text{ γιατί}$$

- $f(1)=1-\ln 3=\ln\dfrac{e}{3}<0$ γιατί $\dfrac{e}{3}<1$.
- $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln(3x))=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln 3-\ln x)=0-\ln 3+(+\infty)=+\infty$

Το $0\in f((0,1])$ και η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ (αφού $f(1)<0$) τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$.

Επειδή f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ είναι:

$$f([1,+\infty))=\left[f(1),\lim_{x\to +\infty}f(x)\right)=\left[\ln\frac{e}{3},+\infty\right) \text{ γιατί}$$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\ln(3x))=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\dfrac{e^x}{3x}\right)=\lim\limits_{u\to +\infty}(\ln u)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{3x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{3}=+\infty$

Το $0\in f([1,+\infty))$ και η f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in[1,+\infty)$ (αφού $f(1)<0$) τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$.

2^{ος} τρόπος:

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ (από 1^{ο} τρόπο) άρα υπάρχει $\alpha>0$ πολύ κοντά στο μηδέν τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$.

Είναι $f(1)<0$ (από 1^{ο} τρόπο)

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=+\infty$ (από 1^{ο} τρόπο) άρα υπάρχει $\beta>0$ σε περιοχή του $+\infty$ τέτοιο ώστε $f(\alpha)>0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,1]$ με $f(\alpha)f(1)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(\alpha,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Επειδή f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό (από 1ο τρόπο) το x_1 είναι μοναδικό.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,\beta]$ με $f(1)f(\beta)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(1,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Επειδή f γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (από 1ο τρόπο) το x_2 είναι μοναδικό.

3ος τρόπος:

Είναι $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}>0$

Είναι $f(1)<0$ (από 1ο τρόπο)

Είναι $f(2)=2-\ln 6=\ln\frac{e^2}{6}>0$ γιατί $e^2>6$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{3},1\right]$ με $f\left(\frac{1}{3}\right)f(1)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in\left(\frac{1}{3},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$. Επειδή f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό (από 1ο τρόπο) το x_1 είναι μοναδικό.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,2]$ με $f(1)f(2)<0$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$. Επειδή f γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό (από 1ο τρόπο) το x_2 είναι μοναδικό.

ΣΧΟΛΙΟ: Προφανώς με βάση τον 2ο και τον 3ο τρόπο το Bolzano μπορεί να εφαρμοστεί και στα διαστήματα $[\alpha,1]$ και $[1,2]$ ή στα διαστήματα $\left[\frac{1}{3},1\right]$ και $[1,\beta]$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\frac{1}{x^2}>0$.

Άρα η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι: $E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$.

Μονάδες 7

Λύση

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx$.

Αρχικά θα μελετήσουμε το πρόσημο της f στο $[x_1, x_2]$

1ος τρόπος: Για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f(x) \neq 0$, η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) άρα η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα αυτό. Είναι $f(1) < 0$ με $x_1 < 1 < x_2$ άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

Άρα $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.

2ος τρόπος: Για $x_1 \le x \le 1 \xRightarrow{f \searrow} f(x) \le f(x_1) = 0$ και για $1 \le x \le x_2 \xRightarrow{f \nearrow} f(x) \le f(x_2) = 0$.

Άρα $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το εμβαδόν:

1ος τρόπος: $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = -[xf(x)]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} xf'(x) dx =$

$$= -x_1 \cancel{f(x_1)}^{0} + x_2 \cancel{f(x_2)}^{0} + \int_{x_1}^{x_2} x\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} (x-1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2^{\ 2}}{2} - x_2 - \frac{x_1^{\ 2}}{2} + x_1 =$$

$$= \frac{x_2^{\ 2}}{2} - \frac{x_1^{\ 2}}{2} - (x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

2ος τρόπος: $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x - x) dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x) dx - \int_{x_1}^{x_2} (x) dx = [x \ln 3x]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} =$

$$= [x \ln 3x]_{x_1}^{x_2} - [x]_{x_1}^{x_2} - \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = \left[x \ln 3x - x - \frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2} = x_2 \ln(3x_2) - x_2 - \frac{x_2^{\ 2}}{2} - x_1 \ln(3x_1) + x_1 + \frac{x_1^{\ 2}}{2}$$

Όμως $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$ και $f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$

Άρα $E = x_2 \ln(3x_2) - x_2 - \frac{x_2^{\ 2}}{2} - x_1 \ln(3x_1) + x_1 + \frac{x_1^{\ 2}}{2} = x_2^{\ 2} - x_2 - \frac{x_2^{\ 2}}{2} - x_1^{\ 2} + x_1 + \frac{x_1^{\ 2}}{2} =$

$$= \frac{x_2^{\ 2}}{2} - \frac{x_1^{\ 2}}{2} - (x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1) = (x_2 - x_1)\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Λύση

Επειδή $f(x) \le 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ με την ισότητα να μην ισχύει για κάθε $x \in [x_1, x_2]$ είναι

$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx < 0 \Leftrightarrow -\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx > 0 \Leftrightarrow E > 0$

Άρα έχουμε ότι $E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2) > 0 \overset{x_2 - x_1 > 0}{\Leftrightarrow} x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$

1ος τρόπος: Είναι $x_1 < 2 - x_1 \Leftrightarrow 2x_1 < 2 \Leftrightarrow x_1 < 1$ που ισχύει άρα $x_1 < 2 - x_1 < x_2$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα $f(2 - x_1) < 0$

2ος τρόπος: Είναι $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ άρα είναι $x_1 < 1 < 2 - x_1 < x_2$ και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ άρα $f(2 - x_1) < 0$

3ος τρόπος: Επίσης $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ άρα είναι $1 < 2 - x_1 < x_2 \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(2 - x_1) < f(x_2) = 0$

4ος τρόπος: Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για την f στο $[2 - x_1, x_2]$ και προκύπτει ότι υπάρχει $\xi \in (2 - x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(2 - x_1)}{x_1 + x_2 - 2} \overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \dfrac{-f(2 - x_1)}{x_1 + x_2 - 2}$

Η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι $\xi > 2 - x_1 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) > f'(2 - x_1) \Leftrightarrow \dfrac{-f(2 - x_1)}{x_1 + x_2 - 2} > f'(2 - x_1)$

Ισχύει ότι $f'(2 - x_1) = \dfrac{2 - x_1 - 1}{2 - x_1} = \dfrac{1 - x_1}{2 - x_1} > 0$ αφού $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ επομένως έχουμε ότι

$\dfrac{-f(2 - x_1)}{x_1 + x_2 - 2} > 0 \overset{x_1 + x_2 - 2 > 0}{\Leftrightarrow} -f(2 - x_1) > 0 \Leftrightarrow f(2 - x_1) < 0$

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

Λύση

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(x_2, f(x_2))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow} y = f'(x_2)(x - x_2)$$

Αφού η f είναι κυρτή είναι $f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$ (1) με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = x_2$

Από Δ1. Ερώτημα είναι $f(1) = 1 - \ln 3$ και η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 άρα $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(x) + \ln 3 - 1 \geq 0$ (2) με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Την (2) μπορούμε να την αποδείξουμε και με άλλον τρόπο:

Άλλος τρόπος: Η εφαπτομένη της C_f στο $N(1, f(1))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \overset{f'(1)=0}{\Leftrightarrow} y = f(1)$$

Αφού η f είναι κυρτή είναι $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 1 - \ln 3 \Leftrightarrow f(x) + \ln 3 - 1 \geq 0 \;\; (2)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1),(2) είναι:

$$2f(x) + \ln 3 - 1 \geq f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow 2f(x) + \ln 3 \geq 1 + f'(x_2)(x - x_2)$$

Η ισότητα θα ίσχυε για $x = 1$ μόνον αν $x_2 = 1$ όμως $x_2 > 1$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.