Askisopolis.gr

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!

Νίκος Τούντας

www.askisopolis.gr

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!

Λίγα λόγια

Εγκαινιάζουμε μία νέα ανάρτηση για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου στο Ασκησόπολις, με αποδέκτες τους μαθητές, καθώς και τους δασκάλους τους. Σκοπός είναι να προσπαθήσουμε να τονίσουμε λεπτά σημεία της ύλης στα οποία μπορούν να γίνουν συχνά λάθη. Λάθη που γίνονται καθημερινά μέσα στις τάξεις.

Δίνεται λοιπόν μία εφαρμογή στην οποία πρέπει να επιλέξουμε την σωστή απάντηση. Δεν είναι ερώτηση θεωρίας, αλλά κανονική άσκηση η οποία χρειάζεται χαρτί και μολύβι. Υπάρχει μία σωστή απάντηση και κάνοντας κάποιο λάθος κατά την επίλυση της άσκησης καταλήγουμε στις άλλες λανθασμένες. Δηλαδή, το λάθος υπάρχει κίνδυνος να νομίζουμε ότι είναι σωστό. Για αυτό και ο τίτλος «Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!».

Στο τέλος υπάρχουν αναλυτικές λύσεις, καθώς και τα πιθανά λάθη που μπορεί να γίνουν και να μας οδηγήσουν σε κάποια από τις υπόλοιπες απαντήσεις.

Καλή διασκέδαση!

Νίκος Τούντας

Επικοινωνία:
Τηλέφωνο: 6980001913
Email: ntountas.maths@yahoo.com
Facebook: Νίκος Τούντας
www.askisopolis.gr / Χρήστης: Νίκος Τούντας

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Προσανατολισμού

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!

3η Άσκηση

2023 – 2024

Αντίστροφη συνάρτηση

Δίνεται η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, με $f(x)=x^{\nu}$, $x\in A$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ και σύνολο τιμών το σύνολο Β, όπου Α και Β μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.
Να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε καθένα από τα παρακάτω.

1) Η συνάρτηση f θα αντιστρέφεται για κάθε αριθμό $\nu\in\mathbb{N}^*$, αν και μόνον αν, το Α είναι σύνολο:
Α. με στοιχεία ομόσημους αριθμούς. **Β.** που δεν περιέχει αντίθετους αριθμούς.

2) Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$ περιττός και $A=\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση f έχει αντίστροφη την συνάρτηση:

Α. $f^{-1}(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{\nu}} & , x\geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{\nu}} & , x<0 \end{cases}$. **Β.** $f^{-1}(x)=\sqrt[\nu]{x}$, $x\geq 0$.

3) Η f αντιστρέφεται και η αντίστροφη έχει πεδίο ορισμού το $B=[0,+\infty)$, αν και μόνον αν:

Α. ο $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι άρτιος. **Β.** $\begin{cases} \nu\in\mathbb{N}^* \text{ περιττός} \\ A=[0,+\infty) \end{cases}$ ή $\begin{cases} \nu\in\mathbb{N}^* \text{ άρτιος} \\ A=(-\infty,0] \text{ ή } A=[0,+\infty) \end{cases}$.

Γ. $A=[0,+\infty)$.

4) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x+\lambda & , x\leq 0 \\ f(x) & , x>0 \end{cases}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση g αντιστρέφεται αν και μόνον αν:

Α. $\lambda\in\mathbb{R}$ **Β.** $\lambda<0$ **Γ.** $\lambda\leq 0$

5) Έστω η 1-1 συνάρτηση $h(x)=\begin{cases} x+\lambda & , x\leq 0 \\ f(x) & , x\geq 0 \end{cases}$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση h έχει αντίστροφη την:

Α. $h^{-1}(x)=\begin{cases} x-\lambda & , x\leq\lambda \\ \sqrt[\nu]{x} & , x\geq 0 \end{cases}$ **Β.** $h^{-1}(x)=\begin{cases} x & , x\leq 0 \\ \sqrt[\nu]{x} & , x\geq 0 \end{cases}$

6) Έστω η 1-1 συνάρτηση $k(x)=\ln x+f(x)+x-\frac{1}{x}$, $x>0$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Οι λύσεις της ανίσωσης $k^{-1}(x)>x$ είναι:
Α. $x<1$ **Β.** $x\in(0,1)$

Νίκος Τούντας

ΛΥΣΗ

1) Για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ πρέπει και αρκεί να ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1^{\nu} \neq x_2^{\nu}$.
Αν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ άρτιος τότε $x_1^{\nu} = x_2^{\nu} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ή $x_1 = -x_2$ ενώ αν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ τότε $x_1^{\nu} = x_2^{\nu} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
Επομένως η f θα αντιστρέφεται για κάθε αριθμό $\nu \in \mathbb{N}^*$, αν και μόνον, οι x_1, x_2 δεν είναι αντίθετοι αριθμοί, άρα σωστή είναι η απάντηση Β.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν λέγαμε ότι όταν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ άρτιος τότε πρέπει τα x_1, x_2 να είναι ομόσημοι θα καταλήγαμε στην απάντηση Α. Όμως το πρόβλημα στους άρτιους δεν είναι το πρόσημο, αλλά το αν είναι αντίθετοι ή όχι όπως είδαμε παραπάνω.

2) Για κάθε $x \in A$ έχουμε $f(x) = y \Leftrightarrow x^{\nu} = y \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[\nu]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[\nu]{-y}, & y < 0 \end{cases}$ άρα $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[\nu]{y}, & y \geq 0 \\ -\sqrt[\nu]{-y}, & y < 0 \end{cases}$.

Συνεπώς $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[\nu]{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt[\nu]{-x}, & x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{\nu}}, & x \geq 0 \\ -(-x)^{\frac{1}{\nu}}, & x < 0 \end{cases}$. Άρα σωστή είναι η απάντηση Α.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν πούμε ότι $x^{\nu} = y \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{y}$, $y \geq 0$ τότε έχουμε κάνει λάθος επειδή θεωρούμε ότι ο x πρέπει να είναι θετικός αριθμός.

3) Για κάθε $x \in A$ είναι $f(x) = y \Leftrightarrow x^{\nu} = y$ με $y \in B = [0, +\infty)$. Άρα αφού $y \geq 0$ θα είναι:

- $x = \sqrt[\nu]{y}$ αν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι περιττός, δηλαδή $A = [0, +\infty)$.
- $x = \sqrt[\nu]{y}$ ή $x = -\sqrt[\nu]{y}$ αν ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι άρτιος. Όμως για να αντιστρέφεται πρέπει το x να μην παίρνει αντίθετες τιμές (όπως είδαμε στο ερώτημα 1). Άρα $x = \sqrt[\nu]{y}$ με $A = [0, +\infty)$ ή $x = -\sqrt[\nu]{y}$ με $A = (-\infty, 0]$.

Άρα σωστή είναι η απάντηση Β.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν λέγαμε ότι:
α) Πρέπει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$ άρα ο $\nu \in \mathbb{N}^*$ άρτιος θα καταλήγαμε στην απάντηση Α η οποία θα ήταν λανθασμένη.
β) Για να είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ πρέπει $x \geq 0$ άρα $A = [0, +\infty)$ θα καταλήγαμε στην απάντηση Γ η οποία είναι λάθος.

4) $g(x) = \begin{cases} x + \lambda, & x \leq 0 \\ f(x), & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) = \begin{cases} x + \lambda, & x \leq 0 \\ x^{\nu}, & x > 0 \end{cases}$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ με $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 + \lambda = x_2 + \lambda \Leftrightarrow x_1 = x_2$
Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1^{\nu} = x_2^{\nu} \Leftrightarrow x_1 = x_2$
Για κάθε $x \leq 0$ είναι $g(x) = y \Leftrightarrow x + \lambda = y \Leftrightarrow x = y - \lambda$ και πρέπει $x \leq 0 \Leftrightarrow y - \lambda \leq 0 \Leftrightarrow y \leq \lambda$.
Άρα $g((-\infty, 0]) = (-\infty, \lambda]$.
Για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) = y \Leftrightarrow x^{\nu} = y$. Πρέπει $y > 0$ και τότε $x = \sqrt[\nu]{y}$. Επομένως πρέπει $x > 0 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{y} > 0 \Leftrightarrow y > 0$ το οποίο ισχύει. Άρα $g((0, +\infty)) = (0, +\infty)$.
Για να αντιστρέφεται η g πρέπει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ να ισχύει $g(x_1) \neq g(x_2)$. Αυτό αποδείξαμε ότι ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ και για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$. Συνεπώς για να

αντιστρέφεται πρέπει να ισχύει και για κάθε $x_1 \le 0$ και $x_2 > 0$.

Αυτό θα συμβαίνει όταν $g((-\infty,0]) \cap g((0,+\infty)) = \varnothing$, δηλαδή $\lambda \le 0$. Άρα σωστή απάντηση είναι η Γ.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Λάθη που ενδέχεται να γίνουν:

α) Δείχνουμε ότι η f ικανοποιεί τις συνθήκες τις 1-1 σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0]$ και $(0,+\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι 1-1 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και καταλήγουμε στην απάντηση Α. Είναι όμως λάθος γιατί δεν αρκεί να ικανοποιούνται οι συνθήκες μόνον σε κάθε διάστημα ξεχωριστά. Για παράδειγμα αν $\lambda = 1$ τότε $g(0) = 0+1 = 1$ και $g(1) = 1^\nu = 1$ και τότε η g όχι 1-1.

β) Αν κάναμε στην παραπάνω σωστή διαδικασία λέγαμε ότι για να είναι $g((-\infty,0]) \cap g((0,+\infty)) = \varnothing$ πρέπει $\lambda < 0$ θα καταλήγαμε στην απάντηση Β. Είναι όμως λάθος γιατί το σύνολο $g((0,+\infty))$ δεν περιέχει την τιμή μηδέν άρα μπορεί να την περιέχει το $g((-\infty,0])$.

5) $h(x) = \begin{cases} x+\lambda, & x \le 0 \\ f(x), & x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow h(x) = \begin{cases} x+\lambda, & x \le 0 \\ x^\nu, & x \ge 0 \end{cases}$.

Η h πρώτα από όλα είναι συνάρτηση άρα για τα κοινά x πρέπει να παίρνει ίδια $h(x)$.

Από τον πρώτο κλάδο είναι $h(0) = \lambda$ ενώ από τον δεύτερο κλάδο είναι $h(0) = 0$ άρα πρέπει $\lambda = 0$.

Άρα $h(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ x^\nu, & x \ge 0 \end{cases}$.

Για κάθε $x \le 0$ είναι $y = h(x) \Leftrightarrow x = y$ με $y \le 0$ (1).

Για κάθε $x \ge 0$ είναι $h(x) = y \Leftrightarrow x^\nu = y$. Πρέπει $y \ge 0$ και τότε $x = \sqrt[\nu]{y}$ (2). Επομένως πρέπει $x \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{y} \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 0$.

Από (1),(2) προκύπτει $h^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \le 0 \\ \sqrt[\nu]{y}, & y \ge 0 \end{cases}$ άρα $h^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \sqrt[\nu]{x}, & x \ge 0 \end{cases}$.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν πούμε ότι με βάση το ερώτημα 4) το μόνο που αλλάζει είναι ότι $g([0,+\infty)) = [0,+\infty)$ άρα για να είναι $g((-\infty,0]) \cap g((0,+\infty)) = \varnothing$ πρέπει $\lambda < 0$, και $h^{-1}(x) = \begin{cases} x-\lambda, & x \le \lambda \\ \sqrt[\nu]{x}, & x \ge 0 \end{cases}$ θα καταλήγαμε στην απάντηση Α. Θα ήταν όμως λάθος γιατί δεν έχουμε ελέγξει το πότε είναι συνάρτηση. Επίσης στην προκειμένη περίπτωση μπορεί τα δύο σύνολο τιμών να έχουν κοινό σημείο το μηδέν σε κοινό x (δηλαδή η τομή τους να μην είναι αναγκαστικά το κενό σύνολο)

6) $k(x) = \ln x + f(x) + x - \frac{1}{x} = \ln x + x^\nu + x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

Για κάθε $0 < x_1 < x_2$ είναι $\begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \\ x_1^\nu < x_2^\nu \\ x_1 < x_2 \\ -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} k(x_1) < k(x_2)$ άρα $k \nearrow (0,+\infty)$.

Η αντίστροφη της k έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της k δηλαδή $D_{k^{-1}} = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της k, δηλαδή $k^{-1}(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$. Άρα $k^{-1}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η ανίσωση $k^{-1}(x) > x$ (Α) ορίζεται για $x \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

Αν $x \le 0$ τότε η (Α) αληθεύει.

Αν $x>0$ τότε $k^{-1}(x)>x \overset{k\nearrow(0,+\infty)}{\Leftrightarrow} x>k(x)\Leftrightarrow \ln x+x^{\nu}+\cancel{x}-\dfrac{1}{x}<\cancel{x}\Leftrightarrow \ln x+x^{\nu}-\dfrac{1}{x}<0$ (B)

Θεωρούμε την συνάρτηση $v(x)=\ln x+x^{\nu}-\dfrac{1}{x}$, $x>0$ με $v(1)=0$.

Για κάθε $0<x_1<x_2$ είναι $\begin{cases}\ln x_1<\ln x_2\\ {x_1}^{\nu}<{x_2}^{\nu}\\ -\dfrac{1}{x_1}<-\dfrac{1}{x_2}\end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} v(x_1)<v(x_2)$ άρα $v\nearrow(0,+\infty)$.

Άρα (B)$\Leftrightarrow v(x)<v(1) \underset{v\nearrow(0,+\infty)}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}} 0<x<1$. Άρα τελικά η (A) έχει λύσεις τα $x<1$ και σωστή είναι η απάντηση A.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν κάναμε μόνο την διαδικασία για $x>0$ θα καταλήγαμε στην απάντηση B, όμως θα ήταν λάθος γιατί δεν θα είχαμε εξετάσει όλα τα x για τα οποία ορίζεται η ανίσωση.