ASKISOPOLIS

ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ

2026

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

από την ομάδα του

ASKISOPOLIS

Ο ΠΙΟ ΠΛΟΥΣΙΟΣ ΚΟΣΜΟΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Η ομάδα του Ασκησόπολις αποτελείται από τους μαθηματικούς:

Στέλιος Μιχαήλογλου

Βαγγέλης Τόλης

Άγγελος Μπλιας

Αποστόλης Κακαβάς

Γαβριήλ Ελευθερίου

Θανάσης Νικολόπουλος

Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης

Νίκος Σαμπάνης

Σάκης Χιονίδης

Νίκος Κουμάντος

Αντώνης Βαλέργας

Νίκος Τούντας

Πανελλαδικές Εξετάσεις
Ημερήσιων – Εσπερινών Γενικών Λυκείων
Τετάρτη 3 Ιουνίου 2026
Εξεταζόμενο μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Αναλυτικές λύσεις των θεμάτων από την ομάδα του Ασκησόπολις

Θέμα Α

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Α3. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$

Α4. α) Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

Θέμα Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h έχουμε $D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \ge 2 / \sqrt{x-2} + 1 > 1\} = \{x \ge 2 / \sqrt{x-2} > 0\} = (2, +\infty) \ne \varnothing$. Άρα για κάθε $x > 2$:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x-2} + 1\right) = 2\ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2\ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln(x-2)$$

Β2. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η f είναι 1-1 με δύο τρόπους:

1ος τρόπος απόδειξης 1-1:

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(2, +\infty)$ με $h'(x) = [\ln(x-2)]' = \dfrac{1}{x-2} > 0$ για κάθε $x > 2$ άρα η $h \nearrow (2, +\infty)$ οπότε είναι 1 – 1 άρα αντιστρέφεται .

2ος τρόπος απόδειξης 1-1:

Για κάθε $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $h(x_1) = h(x_2) \Leftrightarrow \ln(x_1 - 2) = \ln(x_2 - 2) \Leftrightarrow x_1 - 2 = x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ οπότε είναι 1 – 1 άρα αντιστρέφεται.

Ασκησόπολις

Στην συνέχεια θα βρούμε την αντίστροφη με δύο τρόπους:

1ος τρόπος εύρεσης αντίστροφης (χρειάζεται την μονοτονία):

Η h συνεχής και $\nearrow$ στο $(2,+\infty)$ άρα $h\big((2,+\infty)\big)=\left(\lim\limits_{x\to 2^+} h(x), \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}=D_{h^{-1}}$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)\underset{\substack{x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)\underset{\substack{x\to+\infty\\ u\to+\infty}}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.

Για κάθε $x>2$ και $y\in\mathbb{R}$ είναι:

$h(x)=y\Leftrightarrow \ln(x-2)=y\Leftrightarrow x-2=e^y\Leftrightarrow x=e^y+2\Leftrightarrow h^{-1}(y)=e^y+2$, $y\in\mathbb{R}$, ή $h^{-1}(x)=e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

2ος τρόπος εύρεσης αντίστροφης (χρειάζεται την μονοτονία):

Για κάθε $x>2$ είναι: $h(x)=y\Leftrightarrow \ln(x-2)=y\Leftrightarrow x-2=e^y\Leftrightarrow x=e^y+2$.

Πρέπει $x>2\Leftrightarrow e^y+2>2\Leftrightarrow e^y>0$ που ισχύει άρα $h^{-1}(y)=e^y+2$, $y\in\mathbb{R}$ ή $h^{-1}(x)=e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

Β3. 1ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\ln(x-2)\cdot\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\right)=-\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to 2^+}\left[\ln(x-2)\right]=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\left(2\ln(x-1)\right)'}{(x-2)'}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2}{x-1}=2$.

2ος τρόπος: Είναι $f(2)=0$ άρα $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ και η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{2}{x-1}$ άρα $f'(2)=2$.

Επίσης είναι $\lim\limits_{x\to 2} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)\underset{\substack{x\to 2^+\\ u\to 0^+}}{\overset{x-2=u}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=-\infty$.

Θέμα Γ

Γ1. i) 1ος τρόπος: Αφού η $f(x)=\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν $\kappa\neq 0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\kappa x)=\begin{cases}-\infty\ ,\ \kappa<0\\ +\infty\ ,\ \kappa>0\end{cases}$ πράγμα άτοπο. Άρα $\kappa=0$.

2ος τρόπος: Αφού η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^2+1}$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa x^3+\mu x}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\kappa+\frac{\mu}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\kappa$ και προκύπτει $\kappa=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mu}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mu\cdot\dfrac{1}{x^2}\right)=\mu\cdot 0=0$ για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

Ασκησόπολις

ii) Τότε είναι $f(x)=\dfrac{\mu x}{x^2+1}$ και αφού η $y=x$ εφάπτεται στη C_f στο $(0,0)$ τότε $f'(0)=1$

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{\mu(x^2+1)-2\mu x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{\mu-\mu x^2}{(x^2+1)^2}$

Είναι $f'(0)=1 \Leftrightarrow \dfrac{\mu}{1}=1 \Leftrightarrow \mu=1$ και τότε είναι $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ2. i) Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Είναι $f'(x)>0 \overset{(x^2+1)^2>0}{\Leftrightarrow} 1-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$

Άρα αφού η f είναι συνεχής τότε η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$. Έχει τοπικό ελάχιστο για $x=-1$ το $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο το $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
f		↘	Τ.Ε.	↗	Τ.Μ.	↘	

ii) 1ος τρόπος: Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=0$.

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $A_1=(-\infty,-1]$, $A_2=[1,+\infty)$ και $A_3=[-1,1]$.

Η f γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα A_1, A_2 άρα $f(A_1)=\left[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right)=\left[-\dfrac{1}{2},0\right)$,

$f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right]=\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ αύξουσα στο A_3 έχουμε $f(A_3)=[f(-1),f(1)]=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

Η f έχει σύνολο τιμών το $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$

Αν $\alpha\neq 0$ τότε $\dfrac{1}{2}+\alpha^2>\dfrac{1}{2}$ αφού $\alpha^2>0$, οπότε ο αριθμός $\dfrac{1}{2}+\alpha^2$ δεν περιέχεται στο σύνολο τιμών της f, οπότε η εξίσωση $f(x)=\dfrac{1}{2}+\alpha^2$ είναι αδύνατη στη περίπτωση αυτή.

Αν α = 0 τότε η εξίσωση γίνεται $f(x)=\dfrac{1}{2}$ και έχει μοναδική λύση την x =1 γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)\le\dfrac{1}{2}$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x =1 .

2ος τρόπος: Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)=\dfrac{1}{2}+\alpha^2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2}+\alpha^2 \Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{1}{2}=\alpha^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-x^2-1}{2(x^2+1)}=\alpha^2 \Leftrightarrow -\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}=\alpha^2$

- Αν $\alpha\neq 0 \Leftrightarrow \alpha^2>0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη γιατί $-\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- Αν $\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha^2=0$ τότε η εξίσωση γίνεται $-\dfrac{(x-1)^2}{2(x^2+1)}=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ και τότε έχει μοναδική λύση την $x=1$.

Askisopolis

Γ3. i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx =$

$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+1}\cdot x^2}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}dx\alpha = \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$

ii) Είναι $I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$

Είναι $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$ και για $\nu = 0$ είναι $I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - I_1 \Leftrightarrow I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$ ενώ για $\nu = 1$ είναι

$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1-\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{\ln 4 - 1}{4}$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $h(x) = g(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι $0 < g(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα $0 < g(-1) < 1 \Rightarrow g(-1) - 1 < 0 \Leftrightarrow h(-1) < 0$ και $0 < g(0) < 1 \Rightarrow h(0) > 0$.
Επίσης η h είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $h(-1)h(0) < 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$.

1ος τρόπος για την μοναδικότητα:
Έστω ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει δύο ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$, τότε $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$.
Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) με παράγωγο $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $g'(x) \neq -1$. Επειδή $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi) = 0$ πράγμα άτοπο αφού $h'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2ος τρόπος για την μοναδικότητα:
Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $g'(x) \neq -1$.
Επειδή η g' είναι συνεχής τότε και η h' συνεχής. Εφόσον είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ τότε διατηρεί πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$. Συνεπώς αφού η h είναι συνεχής, τότε είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.
Άρα το $x_1 \in (-1,0)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) + x = 0$.

Δ2. Εφόσον η f είναι παραγωγίσιμη τότε $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \in \mathbb{R}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\cancel{x}\left(g(x)+x\right)}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[x\left(g(x)+x\right)\right] = 0\cdot\left(g(0)+0\right) = 0$ αφού g συνεχής.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \kappa}{1} = 2 + 1 - \kappa = 3 - \kappa$.

2ος τρόπος για το παραπάνω όριο: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0^-}\left(2\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa\right) = 2\cdot 1 + 1\cdot 1 - \kappa = 3 - \kappa$ **.**

Άρα είναι $3 - \kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = 3$.

Ασκησόπολις

Δ3. i) 1ος τρόπος: Είναι $f(x)=\begin{cases} x^2\left(g(x)+x\right) & , x<0 \\ 2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x \ , \ 0\le x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\dfrac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$

$=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-1)\left(2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-1\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-1)2(\sigma\upsilon\nu x-1)\left(\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{1}{2}\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$ για

κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ αφού $0<\sigma\upsilon\nu x<1$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Αφού f συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τότε $f\nearrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Για την παραγοντοποίηση εργαστήκαμε ως εξής:

Για το $2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1$ κάναμε σχήμα Horner με $\rho=1$ στο πολυώνυμο $2x^3-3x^2+1$.

Για το $2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-1$ κάναμε παραγοντοποίηση στο τριώνυμο $2x^2-x-1$.

Επομένως είναι $0\le x<\dfrac{\pi}{2}\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)\ge f(0)=0$.

2ος τρόπος: Στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3$ και παρατηρούμε ότι $f'(0)=0$.

Η f' είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με:

$$f''(x)=-2\eta\mu x-\frac{2\cancel{\sigma\upsilon\nu x}\cdot(-\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^{\cancel{4}3}x}=-2\eta\mu x+\frac{2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^3 x}=-2\eta\mu x\left(1-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}\right)$$

Στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $1-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}<0\overset{\sigma\upsilon\nu x>0}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu^3 x-1<0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu^3 x<1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x<1$ ισχύει.

Άρα είναι $1-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^3 x}<0$ και $-2\eta\mu x<0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ επομένως $f''(x)>0$ στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και αφού η f' είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ τότε $f'\nearrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως είναι $0\le x<\dfrac{\pi}{2}\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)\ge f(0)=0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$.

Επίσης f συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ άρα $f\nearrow\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς είναι $0\le x<\dfrac{\pi}{2}\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)\ge f(0)=0$.

3ος τρόπος: Στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\varphi(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

όπου $\varphi(x)=2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x+1$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με $\varphi(0)=0$.

Η φ είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ και παραγωγίσιμη στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ με:

$$\varphi'(x)=-6\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot\eta\mu x+6\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu x=-6\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x-1)>0 \text{ για κάθε } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Ασκησόπολις

αφού είναι $\eta\mu x > 0$ και $0 < \sigma\upsilon\nu x < 1$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Αφού η φ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τότε $\varphi \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Επομένως είναι $0 \le x < \frac{\pi}{2} \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} \varphi(x) \ge \varphi(0) = 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$.

Άρα $f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \ge 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x = 0$.

Επίσης f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα $f \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς είναι $0 \le x < \frac{\pi}{2} \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(x) \ge f(0) = 0$.

ii) Για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $3f(x) = \pi \Leftrightarrow f(x) = \frac{\pi}{3}$.

Η f είναι συνεχής και $\nearrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim\limits_{x\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty)$ αφού $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varepsilon\varphi x = +\infty$.

Παρατηρούμε ότι $\frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ και αφού η $f \nearrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε θα υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 3f(x_2) = \pi$.

Δ4. i. 1ος τρόπος: Για κάθε $x \le 0$ είναι $f(x) = x^2(g(x) + x) = x^2 h(x)$.
Από Δ1 η h έχει μοναδική ρίζα την x_1 άρα στο $(x_1, 0]$ είναι $h(x) \ne 0$ και η h συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο στο $(x_1, 0]$. Είναι $h(0) > 0$ άρα $h(x) \ge 0 \Leftrightarrow x^2 h(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge 0$ κάθε $x \in [x_1, 0]$.

2ος τρόπος: Για κάθε $x \le 0$ είναι $f(x) = x^2(g(x) + x) = x^2 h(x)$.
Από Δ1 η h είναι γνησίως μονότονη όμως επειδή $h(-1) < 0 < h(0)$ τότε $h \nearrow \mathbb{R}$.
Άρα είναι $x \ge x_1 \overset{h\nearrow}{\Leftrightarrow} h(x) \ge h(x_1) = 0$, επομένως για κάθε $x \in [x_1, 0]$.

ii. Από Δ3 είναι $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$ άρα το εμβαδόν του χωρίου Ω είναι $E(\Omega) = \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx$.
Επειδή ο άξονας y΄y χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία τότε
$\int_{x_1}^{0} |f(x)| dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} f(x) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx$ αφού σύμφωνα με τα προηγούμενα ερωτήματα Δ3.i. και Δ4.i. είναι $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \left[x_1, \frac{\pi}{3}\right]$.

Είναι $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x) dx = \left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0} - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x) dx = -x_1^3 g(x_1) - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x) dx = x_1^4 - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x) dx$ αφού από Δ1 είναι $g(x_1) + x_1 = 0 \Leftrightarrow g(x_1) = -x_1$.

Είναι $\int_{x_1}^{0} f(x) dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} \left[x^2 (g(x) + x)\right] dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx \Leftrightarrow$

Ασκησόπολις

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x \right) dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^{0} = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3x^2}{2} \right]_{0}^{\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx - \frac{x_1^{\,4}}{4} = -2 \cdot \frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{9} - (-2 - 0 - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx - \frac{x_1^{\,4}}{4} = -1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2 \Leftrightarrow \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = \frac{x_1^{\,4}}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Άρα τελικά $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = x_1^{\,4} - 3\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = x_1^{\,4} - 3\left(\frac{x_1^{\,4}}{4} + 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \right) =$

$$= x_1^{\,4} - 3\frac{x_1^{\,4}}{4} - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} = \frac{x_1^{\,4}}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 - 3\ln 2 .$$

Ασκησόπολις