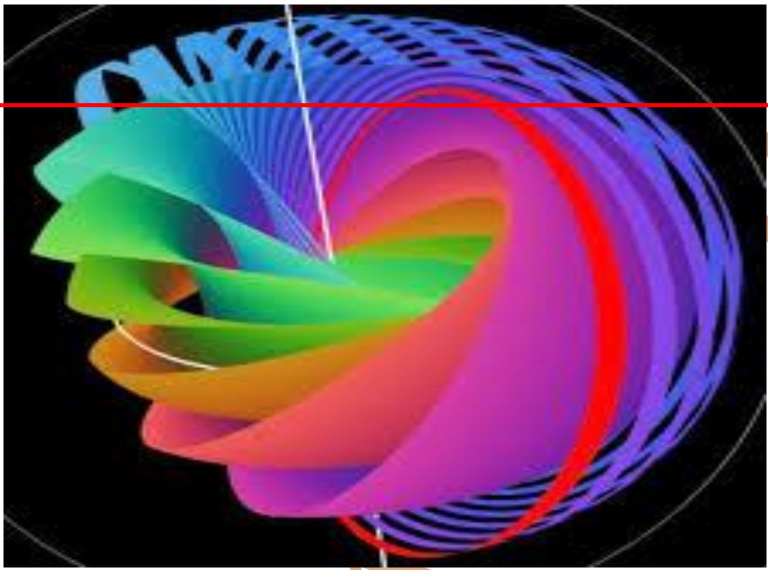
Σάκης Χιονίδης

Askisopolis



Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων ……με λίγα λόγια.

Απαραίτητη θεωρία-Μεθοδολογίες

Βασικό (*ορισμός του **εσωτερικού γινομένου***)

Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τον <u>πραγματικό αριθμό</u> $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ που είναι ίσος με $|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot συν\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right)$.

Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

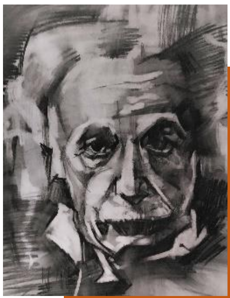
Ο δαίμονας της τριγωνομετρίας

Σε ακτίνια	**0**	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	**π**
Σε μοίρες	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o
συνημίτονο	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1

Μνημονικός κανόνας : υπόριζες 4,3,2,1,0 με παρανομαστή 2

Οι αντίστοιχες παραπληρωματικές τους

Σε ακτίνια	π	$\pi - \pi/6 = 5\pi/6$	$\pi - \pi/4 = 3\pi/4$	$\pi - \pi/3 = 2\pi/3$	$\pi - \pi/2 = \pi/2$	**π**
Σε μοίρες	180^o	150^o	135^o	120^o	90^o	180^o
συνημίτονο	$-\frac{\sqrt{4}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{1}}{2}$	$-\frac{\sqrt{0}}{2}$	-1



Άμεσα από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} > 0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) < 90^o$

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} < 0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) > 90^o$

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 90^o$

Επίσης

$\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

$\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

<u>*Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου*</u>

1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (*αντιμεταθετική*)

2. $(\lambda \cdot \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \cdot \vec{\beta}) = \lambda \cdot (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

3. $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (*επιμεριστική*)

4. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$

5. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) =$ $= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ (*αναλυτική έκφραση εσωτερικού γινομένου*).

6. 💣 (σημαντικό) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Δεν ισχύουν

- ΔΕΝ ισχύει γενικά η προσεταιριστική ιδιότητα , δηλαδή: $\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$
- ΔΕΝ ισχύει ο νόμος της διαγραφής, δηλαδή: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} = \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}\ \ (\vec{\gamma}\neq\vec{0})$, *τότε ΔΕΝ είναι* $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$.
  (ισχύει μόνο όταν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά).
- ΔΕΝ ισχύει γενικά ότι : $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2\cdot\vec{\beta}^2$
  (ισχύει μόνο όταν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά)
- ΔΕΝ ισχύει γενικά ότι $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.
  (ισχύει μόνο όταν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά)

ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΙ :

- ✓ $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$
- ✓ $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + \vec{\beta}^2$
- ✓ $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta}) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2$
- ✓ $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})^2 = \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} + 2\cdot\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} + 2\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΟΥΝ ΟΙ ταυτότητες με περιττές δυνάμεις

Ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$$

Ανισότητα Minkowski

$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

Οι ελάχιστες μέθοδοι για την αντιμετώπιση θεμάτων με εσωτερικό γινόμενο

<u>1.</u> Θέλουμε να υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$.

<u>ΤΟΤΕ:</u>

- Αν γνωρίζουμε τα $|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\beta}|$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ $\Rightarrow$ $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$.
- Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δηλαδή αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$, τότε $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$
- Αν έχουμε μια σχέση $f\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\dots\right)=\vec{0}$ με διάφορα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ … τότε πηγαίνουμε στο ένα μέλος τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και στο άλλο τα υπόλοιπα διανύσματα και υψώνουμε στο τετράγωνο.

<u>2.</u> Θέλουμε να βρούμε το μέτρο $|\vec{x}|$ ενός διανύσματος $\vec{x}$

<u>ΤΟΤΕ:</u>

- Αν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες του $\vec{x}$, δηλαδή $\vec{x}=(x_1,x_2)$, τότε: $|\vec{x}|=\sqrt{{x_1}^2+{x_2}^2}$
- Αν δεν είναι γνωστές οι συντεταγμένες του $\vec{x}$, τότε εκφράζουμε το $\vec{x}$ συναρτήσει άλλων διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ … , δηλαδή $\vec{x}= f\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\dots\right)$ και ξεκινάμε υπολογίζοντας το τετράγωνο του μέτρου του $\vec{x}$:
  $|\vec{x}|^2=\left|f\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\dots\right)\right|^2=\left(f\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma},\dots\right)\right)^2=\cdots$

<u>3.</u> Θέλουμε να υπολογίσουμε γωνία.

<u>ΤΟΤΕ:</u>

Προσπαθούμε να την δούμε σαν γωνία δύο διανυσμάτων π.χ $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ και γράφουμε τον τύπο: $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|}$

4. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι κάθετα.

ΤΟΤΕ:

Δείχνουμε ότι έχουν εσωτερικό γινόμενο 0 (είναι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$)

5. Θέλουμε να δείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι ομόρροπα.

ΤΟΤΕ *δείχνουμε κάποιο από τα παρακάτω:*

- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ με $\lambda > 0$.
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

6. Θέλουμε να δείξουμε ότι δύο διανύσματα είναι αντίρροπα.

ΤΟΤΕ *δείχνουμε κάποιο από τα παρακάτω:*

- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ με $\lambda < 0$.
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow |\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = \big||\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}|\big|$
- $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$

7. Θέλουμε να διώξουμε μέτρα διανυσμάτων

ΤΟΤΕ: *«τετραγωνίζουμε»* , δηλαδή υψώνουμε στο τετράγωνο κάθε μέλος της σχέσης. Τότε τα μέτρα γίνονται παρενθέσεις:

$$|\vec{A}| = |\vec{B}| \Leftrightarrow |\vec{A}|^2 = |\vec{B}|^2 \Leftrightarrow (\vec{A})^2 = (\vec{B})^2 \Leftrightarrow \cdots$$

8. Θέλουμε να αναλύσουμε ένα διάνυσμα σε δύο συνιστώσες

Όταν θέλουμε να αναλύσουμε ένα διάνυσμα $\vec{\delta}$ σε δύο συνιστώσες κάθετες μεταξύ τους, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη με γνωστό διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ ΤΟΤΕ:

- Ανάλυση του $\vec{\delta}$ σε δύο συνιστώσες σημαίνει γράφουμε το $\vec{\delta}$ σαν άθροισμα δύο διανυσμάτων:

  $\vec{\delta} = \vec{p} + \vec{q}$ (*τα $\vec{p}, \vec{q}$ είναι οι δύο συνιστώσες του $\vec{\delta}$*)
- $\vec{p} \perp \vec{q}$ *και* $\vec{p} // \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{p} = \lambda \cdot \vec{\alpha}$, $\lambda \epsilon IR$.
- $\vec{\delta} = \lambda \cdot \vec{\alpha} + \vec{q}$

- Πολλαπλασιάζουμε κάθε μέλος με το $\vec{\alpha}$:
  $\vec{\delta} = \lambda \cdot \vec{\alpha} + \vec{q} \Rightarrow \vec{\delta} \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\alpha}^2 + \vec{q} \cdot \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\delta} \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot |\vec{\alpha}|^2 + \cancelto{0}{\vec{q} \cdot \vec{\alpha}}$
  Οπότε από την παραπάνω σχέση βρίσκουμε το λ και έτσι τις δύο συνιστώσες του $\vec{\delta}$.