Επιμέλεια : Κουκουλιάντας Γ.

ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

1) Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α λέγεται περιοδική;
2) Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
3) Πότε μια συνάρτηση f ορισμένη στο Α, θα λέμε ότι παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_0 \in A$;
4) Πότε μια συνάρτηση λέγεται άρτια στο πεδίο ορισμού της Α;
5) Τί καλούμε πολυώνυμο;
6) Τί ονομάζουμε λογάριθμο ενός θετικού αριθμού θ ως προς βάση α με α > 0 και α ≠ 1;

ΘΕΜΑ 2ο

Να χαρακτηριστούν με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) οι προτάσεις :

1) Έστω D , Dx , Dy οι ορίζουσες ενός συστήματος 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους.
   Αν D = Dx = Dy = 0 τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
2) Αν D = 0 το σύστημα είναι πάντοτε αόριστο.
3) Το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases}$ είναι αδύνατο.
4) Η περίοδος της f(x) = ημ(ω·x) με ω > 0 είναι $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
5) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται άρτια αν για κάθε x ϵ Α ισχύει –x ϵ Α και f(–x) = –f(x).
6) Μία συνάρτηση άρτια με Α = R στο $x_0 = 2$ έχει f(2) = 5 και f(–2) = 5 .
7) Η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2$ έχει ελάχιστο.
8) Κάθε άρτια συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y .
9) Μία συνάρτηση f θα λέγεται γνησίως αύξουσα σε διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της όταν για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.
10) Αν για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) \geq f(x_0)$ τότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 \in A$.
11) Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f(x) = α·ημ(ω·x), α>0, ω>0 είναι το α και η ελάχιστη είναι το –α.
12) Η f(x) = εφ(ω·x) έχει περίοδο $T = \frac{\pi}{\omega}$.
13) Η συνάρτηση f(x) = ημx είναι περιοδική με περίοδο 2π.
14) Η συνάρτηση $f(x) = 2\cdot ημ\left(\frac{\pi\cdot x}{2}\right)$ έχει μέγιστο το 2.
15) Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο 2π.

Αθηροτόλης

16) Αν συνα ≠ 0, συνβ ≠ 0, συν(α + β) ≠ 0 τότε $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$.

17) συν2α = 2ημ^{2}α – 1.

18) $\eta\mu\alpha=2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ . .

19) συν2α = ημ^{2}α – συν^{2}α.

20) συν(α – β) = συνα·συνβ + ημα·ημβ.

21) συν(α + β) = συνα·συνβ + ημα·ημβ.

22) $2\eta\mu\frac{\pi}{12}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}$.

23) $\frac{2\cdot\varepsilon\varphi\frac{\pi}{8}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\pi}{8}}=1$.

24) Ισχύει $\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$.

25) Είναι ημ(α + β) = ημα + ημβ.

26) ημ2α = 2ημασυνα.

27) συν2α = 2ημ^{2}α + 1.

28) ημ(α – β) = ημα·συνβ – ημβ·συνα.

29) Οι λύσεις της εξίσωσης εφx = εφθ είναι x = κπ ± θ, κ∈Z

30) Ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^5 + 3x^4 – 7x + 1 = 0$.

31) (συνx – ημx)(συνx + ημx) = συν2x.

32) Η εξίσωση $x^5 – ρx – 12 = 0$, ρ ακέραιος, αποκλείεται να έχει ρίζα το 7.

33) Το μηδενικό πολυώνυμο έχει άπειρες ρίζες.

34) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ).

35) Αν τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) έχουν βαθμούς μ και ν τότε το πολυώνυμο P(x)·Q(x) έχει βαθμό μ·ν

36) Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων.

37) Αν για το πολυώνυμο P(x) ισχύει P(x) = π(x)·(x – ρ) ,τότε P(ρ) = 0.

38) Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται ο βαθμός.

39) Αν ρ ρίζα του πολυωνύμου P(x) τότε P(ρ) = 0 και x – ρ παράγοντας του P(x).

40) Η εξίσωση $3x^3 – 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 2.

41) Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.

42) Αν ένα πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το –2 τότε διαιρείται με το x + 2.

Ασκηπόπολις

43) Αν για το πολυώνυμο P(x) ισχύει $(x^2 – 1) \cdot P(x) = x^6 + 2x^4 – 5x – 9$ τότε το P(x) είναι τρίτου βαθμού.

44) Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2.

45) Η εξίσωση $6x^6 – 3x^3 + 2x^2 – x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το –3.

46) Ο αριθμός x = –2 για κάθε α, β, $\gamma \in Z$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x + 2005 = 0$.

47) Ο βαθμός κάθε σταθερού και μή μηδενικού πολυωνύμου είναι ίσος με 0.

48) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι το P(–ρ).

49) Η εξίσωση $x^4 + 5x^2 + 6 = 0$ έχει ρίζα θετικό ακέραιο αριθμό.

50) Ο αριθμός –1 είναι ρίζα τις εξίσωσης $(5x + 6)^{2004} + (6x + 5)^{2005} = 0$.

51) Οι πραγματικοί αριθμοί είναι σταθερά πολυώνυμα.

52) Ο βαθμός του γινομένου δύο μή μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

53) Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού.

54) Στην εξίσωση $\alpha_v x_v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o = 0$ με ακέραιους συντελεστές, αν ο ακέραιος ρ διαιρεί τον α_o τότε ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης σίγουρα.

55) Η συνάρτηση $f : R \to R$ με $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$.

56) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 1$ έχει πεδίο ορισμού το R και είναι γνησίως αύξουσα.

57) Ισχύει $e^x > 1 \Leftrightarrow x > e$.

58) Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι φθίνουσα στο R.

59) Αν $f(x) = \alpha^x$ και $0 < \alpha < 1$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

60) Αν $x_1 < x_2$ τότε $\left(\frac{2}{3}\right)^{x_1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{x_2}$.

61) Κάθε εκθετική συνάρτηση $f(x)= \alpha^x$ (με $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$) έχει πεδίο ορισμού το R σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο R.

62) Η $f(x) = 3^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

63) Αν $3^{-x_1} > 3^{-x_2}$ τότε $x_1 > x_2$.

64) Ο τύπος $Q(t) = Q_o \cdot e^{c \cdot t}$ εκφράζει το νόμο της εκθετικής απόσβεσης όταν $c < 0$ και $Q_o > 0$.

65) Η συνάρτηση $f(x) = 10^{-x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

66) Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

67) Αν $3^x = 81$ τότε x = 3.

68) Αν $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$ τότε για οποιαδήποτε θ_1 , $\theta_2 > 0$ ισχύει $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 \cdot \log_\alpha \theta_2$

69) Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ είναι συμμετρικές ως προς την ψ = x.

70) Το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \to R$ με $f(x) = \ln x$ είναι το διάστημα $[0, +\infty)$.

Ασκηπόπολις

71) Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς x_1 , x_2 ισχύει $\log\frac{x_1}{x_2} = \frac{\log x_1}{\log x_2}$.

72) Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$, τότε $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha \theta$

73) Αν $\theta > 0$, τότε $e^{\ln\theta} = \theta$.

74) Για κάθε $x \in R$ είναι $x = \ln e^x$.

75) Για x_1 , x_2 θετικούς ισχύει $\ln x_1 = \ln x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

76) Ισχύει $\ln e = 0$.

77) Ισχύει $10^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x$, για $\theta > 0$.

78) $\log_\alpha \theta = x \Leftrightarrow \alpha^x = \theta$. (όπου $\theta > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$)

79) $\log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2 = \log_\alpha(\theta_1 + \theta_2)$. (όπου $\theta_1, \theta_2 > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$)

80) $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta$.

81) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το R.

82) Αν $\ln\theta$ ο φυσικός λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ τότε ισχύει η ισοδυναμία $\ln\theta = x \Leftrightarrow e^x = \theta$.

83) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, για $x > 0$.

84) $\ln e = e$.

85) Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 0$ ισχύει $\log\left(\frac{\theta}{10}\right) = \log\theta - 1$.

86) Αν $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει $\log_\alpha 1 = 1$.

87) Αν $\theta > 0$ τότε $10^{\log\theta} = \theta$.

88) Για κάθε $x \in R$ $\ln e^x = x$.

89) Αν $\theta > 0$ και $\theta \neq 10$, τότε $\log\theta^{10} = \theta$.

90) Η παράσταση $10^{\log 3}$ είναι ίση με 3.

91) Η παράσταση $\ln 12 - \ln 4$ είναι ίση με $\ln 8$.

92) Για κάθε $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει $\log_\alpha \alpha = 1$.

93) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα.

94) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log_\alpha x$ $(0 < \alpha \neq 1)$ είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

95) Για κάθε x πραγματικό και διάφορο του μηδενός ισχύει $\log x^2 = 2\cdot\log x$.

96) $\log\frac{1}{2} < \log\frac{2}{3}$.

97) $\log 10 = 1$.

98) $\ln 1 = 0$.

99) $\log\frac{1}{3} < 0$.

ΘΕΜΑ 3ο

<u>Να γίνουν οι σωστές αντιστοιχίσεις:</u>

Δοκηπόπολις

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. συν(α – β)	α. $2\eta\mu\frac{\alpha}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}$
2. $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$	β. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$
3. $\varepsilon\varphi^2\alpha$	γ. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
4. $\eta\mu^2\alpha$	δ. συνα·συνβ + ημα·ημβ
5. συν(α + β)	ε. $2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$
6. συν2α	στ. $1 - 2\eta\mu^2\alpha$
	ζ. συνα·συνβ – ημα·ημβ

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. ημ(α – β)	α. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$
2. συν2α	β. 2·ημα·συνα
3. $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$	γ. $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$
4. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha$	δ. συνα·συνβ – ημα·ημβ
5. συν(α + β)	ε. συν2α
6. ημ2α	στ. $\eta\mu^2 2\alpha - 1$
	ζ. ημα·συνβ – ημβ·συνα
	η. ημα·συνβ + ημβ·συνα

ΘΕΜΑ 4ο

<u>Συμπληρώστε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:</u>

1) Η συνάρτηση f(x) = 3·ημ2x έχει περίοδο Τ = …… και παρουσιάζει μέγιστο

Ασκηπόπολις

στην θέση x_1 = …… το οποίο έχει τιμή $ψ_1$ = …….. και ελάχιστο στην θέση x_2 = ……
το οποίο έχει τιμή $ψ_2$ = …….

2) Να συμπληρωθούν οι τύποι: • συν(α + β) = ……..

• ημ(α – β) = …….. • εφ(α + β) = ……

• $\frac{1-συν2α}{2}$ = …… • εφ2α = …… • συν(α – β) = ……

• ημ2α = …… • συν2α = …… ή ……. ή …….

• ημ(α + β)= ……..

• Ο τύπος που εκφράζει το $ημ^2α$ συναρτήσει του συν2α είναι: $ημ^2α$ = ……..

• Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το ..... των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

3) Να συμπληρωθούν οι τύποι: • ……. = $\log_α θ_1 + \log_α θ_2$ • $\log_α \frac{θ_1}{θ_2}$ = ……

• $\log_α θ^κ$ = …….. • $\log_α θ = x \Leftrightarrow$ …….…… • $\ln θ = x \Leftrightarrow$ ……..…. • $\log_α α^x$ = ……..

• $\log_α α$ = ……. • $\log_α 1$ = ……. • $α^{\log_α θ}$ = …… • ln e = ……

• $\log θ = x \Leftrightarrow$ ……..…. • $\log_α α^e$ = ……. • $e^{\ln α}$ = ……..

4) • Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως ……..

• Αν α είναι ένας θετικός αριθμός και α ≠ 1, τότε η συνάρτηση $f(x) = α^x$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα ..... • $α^x \cdot β^x$ = ……..

ΘΕΜΑ 5ο

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα πολλαπλής επιλογής:

1) Αν $3x + 2y = 1$, $5x + 6y = 2$ τότε το D_x ισούται με: Α. 1 Β. –8 Γ. 8 Δ. 2 Ε. –2

2) Το πολυώνυμο $Q(x) = (2x + 3)^{2005} + x^{2003}$ έχει παράγοντα το:

Α. x + 1 Β. x – 1 Γ. x – 5 Δ. x

3) το $συν^2α$ είναι ίσο με:

Α. $\frac{συν2α-1}{2}$ Β. $\frac{1+συν2α}{2}$ Γ. 1 + συν2α

4) Αν lnθ = x τότε:

Δοκιμαστικό

Α. $e^{\theta} = x$ Β. $x^{e} = \theta$ Γ. $e^{x} = \theta$ Δ. $x^{\theta} = e$

5) Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_{\nu}x_{\nu} + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$ έχει μία ρίζα το 0. Τότε για το α_o ισχύει:

Α. $\alpha_o > 0$ Β. $\alpha_o < 0$ Γ. $\alpha_o = 0$

6) Η παράσταση $A = \log 2^3$ είναι ίση με:

Α. 3 Β. 2 Γ. 8 Δ. $3\cdot\log 2$ Ε. $\log 2$

7) Η παράσταση $\Pi = (\eta\mu 15^o - \sigma\upsilon\nu 15^o)^2 - 2\eta\mu 15^o \sigma\upsilon\nu 15^o$ είναι ίση με:

Α. 0 Β. 1 Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. κανένα από τα προηγούμενα

8) Το πολυώνυμο $P(x) = (x - 1)^{2000} + x - 3$ το διαιρούμε με το διώνυμο $x - 1$.

Το υπόλοιπο αυτής της διαίρεσης είναι :

Α. 0 Β. –3 Γ. 3 Δ. –2 Ε. 2

9) Η τιμή της παράστασης $\sigma\upsilon\nu 72^o \sigma\upsilon\nu 63^o - \eta\mu 63^o \eta\mu 27^o$ είναι:

Α. 1 Β. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Γ. 0 Δ. –1 Ε. $\frac{1}{2}$

10) Αν $\log_{\alpha} \theta = x$ τότε:

Α. $\alpha^{\theta} = x$ Β. $x^{\alpha} = \theta$ Γ. $\alpha^{x} = \theta$

11) Αν $1 \neq \alpha > 0$ και $x \in R$ τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ έχει σύνολο τιμών :

Α. $(0, +\infty)$ Β. $(-\infty, +\infty)$ Γ. $[0, +\infty)$

12) Για ποιά τιμή του α τα πολυώνυμα

$P(x) = (\alpha^2 - 6)x^3 + 2x^2 + (\alpha - 3)x + 8$, $Q(x) = 3x^3 + (2\alpha - 4)x^2 + \alpha^2 - 1$ είναι ίσα;

Α. 3 Β. –3 Γ. 2 Δ. Καμία από τις προηγούμενες

13) Οι αριθμοί $\kappa\pi + \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in Z$ είναι ρίζες της εξίσωσης:

Α. $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ Β. $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ Γ. $\varepsilon\varphi x = 1$ Δ. $\varepsilon\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Ε: $\sigma\varphi x = \sqrt{3}$

14) Αν $P(x) + Q(x) = R(x)$ και οι βαθμοί των πολυωνύμων Q, R είναι 4 τότε

ο βαθμός του πολυωνύμου P είναι:

Α. 4 Β. μεγαλύτερος ή ίσος του 4 Γ. μικρότερος ή ίσος του 4

Δ. μεγαλύτερος ή ίσος του 3 Ε. μικρότερος ή ίσος του 3

Δοκηδοτολις

15) Ένα πολυώνυμο έχει σταθερό όρο 1998. Ποιός από τους παρακάτω δεν είναι δυνατόν να είναι παράγοντας του πολυωνύμου:

Α. $x - 1$ Β. $x + 1998$ Γ. $x - 37$ Δ. $x + 111$ Ε. $x - 73$

16) Αν $2^{2-x} = 4$ τότε το x είναι:

Α. 4 Β. 2 Γ. 0 Δ. –2 Ε. 1

17) Αν για το πολυώνυμο P(x) ισχύει $(x + 1)\cdot P(x)\cdot(x^2 + 1) = x^5 + x^4 - x^2 - x$, τότε το P(x) είναι βαθμού:

Α. πέμπτου Β. τρίτου Γ. δευτέρου Δ. πρώτου

18) Το πολυώνυμο $P(x) = x^6 + 2x^4 + x^2 + 1$ το διαιρούμε με $x - \rho$. Αν υ το υπόλοιπο της διαίρεσης τότε:

Α. $\upsilon > 0$ Β. $\upsilon < 0$ Γ. $\upsilon = 0$ Δ. $\upsilon \leq 0$

19) Αν το $x^2 + 3x - 4$ είναι παράγοντας του P(x) τότε ρίζα του P(x) είναι:

Α. 2 Β. –1 Γ. $\frac{1}{2}$ Δ. 1 Ε. 3

20) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x + 1$ είναι το –2 , τότε το P(–1) είναι :

Α. –1 Β. 2 Γ. –2 Δ. 4 Ε. 1

21) Αν $2^{2^x} = 256$ τότε το x είναι:

Α. 4 Β. 1 Γ. 2 Δ. –1 Ε. 3

22) Αν το P(x) είναι σταθερό πολυώνυμο και P(2) = 5 τότε το P(–2) είναι :

Α. 5 Β. –5 Γ. 2 Δ. –2 Ε. 0

23) Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$ είναι:

Α. γνησίως αύξουσα στο R Β . γνησίως φθίνουσα στο R

Γ. σταθερή στο R Δ . έχει πεδίο ορισμού το R*

24) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^2x^3 + 4\lambda x + 4$ όπου $\lambda \in R$. Για ποιά από τις παρακάτω τιμές του λ το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $(x - 1)$ είναι ίσο με το μηδέν.

Α. $\lambda = 8$ Β. $\lambda = -2$ Γ. $\lambda = 3$ Δ. $\lambda = 1$ Ε. $\lambda = 0$

25) Το $P(x) = (\lambda^2 - 4)x^2 + (\lambda - 2)x - (\lambda + 2)$ είναι $1^{ου}$ βαθμού αν το λ είναι ίσο με:

Α. –2 Β. –1 Γ. 0 Δ. 1 Ε. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ασκηθείτε

26) Η εξίσωση $3^x + 2^x = 2$ έχει λύση τον αριθμό:

Α. –2 Β. 0 Γ. –1 Δ. 1 Ε. $\frac{1}{2}$

27) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = κ^2x^3 – 3κx^2 + κx + 1$, όπου $κ \in R$. Για ποιά από τις παρακάτω τιμές του κ, το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x – 1 είναι ίσο με το μηδέν;

Α. κ = 0 Β. κ = –1 Γ. κ = 1 Δ. κ = 2 Ε. κ = –2

28) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 – x + 2$. Ποιό από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι παράγοντας του P(x);

Α. x + 2 Β. x – 1 Γ. x + 1 Δ. x – 2 Ε. κανένα από τα προηγούμενα

29) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $(18x^{80} – 6x^{50} + 4x^{20} - 2) : (x + 1)$ είναι:

Α. –5 Β. 8 Γ. 14 Δ. 0 Ε. –1

30) Το πολυώνυμο $P(x) = 8x^{40} + 3x^{20} + 15x^4 + 16x^2 + 5$

Α. δεν έχει παράγοντα της μορφής x – ρ Β. έχει παράγοντα της μορφής x – ρ

Γ. έχει παράγοντα της μορφής $x – ρ^2$ Δ. κανένα από τα προηγούμενα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x + y = 7 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

i) Να βρεθούν τα D, D_x, D_y ii) Να βρεθούν τα x, y

2) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{3} = 1 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 3 \end{cases}$

3) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} x + 3y = λ \\ 2x + y = μ + 1 \end{cases}$

i) Να βρεθούν οι ορίζουσες D, D_x, D_y του συστήματος.

ii) Να αποδειχθεί ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

iii) Εάν η λύση του συστήματος είναι (x, y) = (2, –1) να βρείτε τα λ, μ.

4) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} (λ - 1)x + 2y = 1 \\ 4x + (λ + 1)y = 2 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές του λ.

Ασκησοπόλις

5) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 2 - \lambda \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές του λ.

6) Δίνονται οι ευθείες ε_1: $\lambda x + y = 1$ και ε_2: $x - \lambda y = 3$.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ, οι ευθείες τέμνονται.

ii) Για λ = 1 να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών.

7) Να λυθεί η παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού: $\lambda^2 x - \lambda = x - 1$.

8) Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \alpha x - y = -\beta \\ 4x - y = -3 \end{cases}$. Να βρείτε για ποιές τιμές των α και β:

α) το (Σ) έχει μοναδική λύση.

β) το (Σ) δεν έχει λύσεις.

γ) το (Σ) έχει άπειρες λύσεις και ποιές είναι αυτές.

9) α) Να δείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$. β) Να λυθεί η εξίσωση $1 + \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu x$.

10) Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu^2 x - 3|\eta\mu x| + 2 = 0$.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{x}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 2\eta\mu^2 \frac{x}{2} \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2})$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

12) α) Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = 2\eta\mu(\frac{x}{2}) + 1$.

β) Να αποδειχθεί ότι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$.

13) α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x = \frac{1}{2}\eta\mu 2x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x = \frac{1}{4}$.

14) α) Να λυθεί η εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 1 = -3\sigma\upsilon\nu x$.

β) Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu^2 x$ και να υπολογιστεί το $\sigma\upsilon\nu 2x$.

15) Έστω ότι για τη γωνία α ισχύει $\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 5\eta\mu\alpha - 3 = 0$, με $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ασκηπόπολις

α) Να αποδείξετε ότι ημα = $\frac{1}{2}$.

β) Να υπολογίσετε το συν2α.

γ) Να λύσετε ως προς x την εξίσωση 2συν(x + α) = 2συν2α – 1 στο διάστημα [π, $\frac{3\pi}{2}$).

16) Να λύσετε την εξίσωση: ημ2x = 2συν^{2}x.

17) Αν 0 < α < $\frac{\pi}{2}$, ημα = $\frac{2}{3}$ και ημβ = $\frac{1}{3}$ να υπολογίσετε το ημ(α + β).

18) Να λυθεί η εξίσωση 2ημ2x + 2$\sqrt{3}$ ημx + 2συνx + $\sqrt{3}$ = 0.

19) Να λύσετε την εξίσωση ημ2x – $\sqrt{2}$ συνx = 0.

20) Να αποδείξετε ότι $\frac{1-\text{συν}2\alpha+\text{ημ}2\alpha}{1+\text{συν}2\alpha+\text{ημ}2\alpha} = \text{εφα}$.

21) Για τη γωνία α ισχύει ότι συν2α + 7ημα − 4 = 0.

α) Να δείξετε ότι ημα = $\frac{1}{2}$.

β) Αν επιπλέον ισχύει $\frac{\pi}{2}$ ≤ α ≤ π, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2α, συν2α και εφ2α.

22) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο f(x) = ρ·ημ(ω·x) + 1 όπου ρ, ω > 0. Επίσης δίνεται ότι έχει μέγιστη τιμή ίση με 3 και περίοδο ίση με π.

α) Να αποδείξετε ότι ρ = ω = 2.

β) Να βρείτε τα σημεία με x∈[0, π], στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x΄x.

23) Δίνεται η παράσταση Π = συν(α + β) · συν(α – β).

α) Να αποδείξετε ότι Π = συν^{2}α – ημ^{2}β.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cdot\text{συν}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{1}{2}$.

24) Να λυθούν οι εξισώσεις: α) ημx = $\frac{1}{2}$ β) $\text{ημ}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{2}$ γ) $\text{ημ}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\text{ημ}^2x-\text{συν}^2x$

25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\text{ημ}4x}{1+\text{συν}4x}\cdot\frac{\text{συν}2x}{1+\text{συν}2x}$ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Λοκηοόπολις

α) Να αποδείξετε ότι f(x) = εφx.

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

γ) Να βρείτε τις λύσεις που βρίσκονται στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \cdot \eta\mu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$

α) Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης.

β) Να βρεθούν τα x∈[0, π] για τα οποία η f παρουσιάζει την μέγιστη τιμή.

27) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{3}\right)$.

α) Ποιά είναι η μέγιστη, ποιά η ελάχιστη τιμή της και ποιά είναι η περίοδός της;

β) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 1.

28) Πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το x + 1 δίνει υπόλοιπο 5 και διαιρούμενο με το x – 3 δίνει υπόλοιπο –7.

α) Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x^2 – 2x – 3) είναι το αx + β να δείξετε ότι: α = –3 και β = 2 .

β) Αν α = –3 και β = 2 και π(x) το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x^2 – 2x – 3 να γράψετε την ταυτότητα της αντίστοιχης διαίρεσης

γ) Αν το πηλίκο π(x) > 0 για κάθε x∈R, να λυθεί η ανίσωση P(x) > –3x + 2.

29) α) Να βρείτε για ποιές τιμές των α, β∈R το P(x) = x^4 + αx^3 + βx^2 – 16x – 12 έχει παράγοντες τους x + 1 και x – 2.

β) Για α = 4 και β = –1 να λυθεί η εξίσωση x^4 + αx^3 + βx^2 – 16x – 12 = 0.

30) Δίνεται το πολυώνυμο Π(x) = x^3 – x^2 – $λ^2$ x + 2λ.

α) Αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα του Π(x), να βρείτε τις τιμές του λ.

β) Για λ = 2 να δείξετε ότι έχει παράγοντα το x – 1.

31) Δίνεται το πολυώνυμο P(x) = x^3 + $2x^2$ + 7x + 6.

α) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

β) Να κάνετε την διαίρεση P(x) : (x^2 – x + 3) και να γράψετε τη ταυτότητα της διαίρεσης.

32) Δίνεται το πολυώνυμο P(x) = x^4 – συναx^3 + συναx^2 – συν2αx + συν^{3}α – συνα , α∈R.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο x – συνα είναι παράγοντας του P(x).

Ασκηπόπολις

β) Για α = 0 να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

33) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 – κx^2 – 5x + (λ + 2)$.

α) Αν η τιμή του πολυωνύμου για x = 0 είναι 3λ – 6 δείξτε ότι λ = 4.

β) Αν λ = 4 να βρείτε το κ έτσι ώστε το πολυώνυμο να έχει παράγοντα το x + 2 .

γ) Για τις τιμές των κ και λ που βρήκατε παραπάνω να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

34) Να βρεθούν τα α, β∈R ώστε το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 – 2x^2 + βx + 2$

α) Να έχει παράγοντες το x – 2 και το x + 1.

β) Να λυθεί η ανίσωση P(x) ≥ 0.

35) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + (συν2θ)x^3 – (3συνθ)x^2 + 2x – 1$.

Να βρεθεί ο θ∈[0, π] ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x – 1.

36) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 – βx + 1$ α, β∈Z. Αν το P(x) έχει ρίζα το –1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x) : (x – 1) είναι 6 τότε:

α) Να δείξετε ότι α = 2 και β = –2.

β) Για τις τιμές των α, β του (α) ερωτήματος, να λύσετε την ανίσωση P(x) ≥ 0.

37) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 – (λ – 3)x^2 – λx + 6$.

α) Για ποιές τιμές του πραγματικού αριθμού λ το P(x) έχει παράγοντα το x – 3;

β) Αν λ = 5:

i. να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x – 2.

ii. να γράψετε το P(x) ως γινόμενο τριών πρωτοβάθμιων πολυωνύμων.

38) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = λx^3 – x^2 – 4x + 2$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ∈R για την οποία ο αριθμός ρ = 1 είναι ρίζα του P(x).

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το x – 1.

γ) Να βρείτε τα x∈R για τα οποία ισχύει P(x) + 4x – 2 > 0.

39) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 + (β – 1)x^2 – 3x – 2β + 6$, όπου α, β∈R.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x + 1 είναι ίσο με 2, τότε να αποδείξετε ότι α = 2 και β = 4.

β) Για τις τιμές α = 2 και β = 4, να βρείτε το πηλίκο π(x) της διαίρεσης του P(x) με το x + 1.

γ) Για τις ίδιες τιμές των α, β να λύσετε την ανίσωση P(x) > 0.

Αοκηδόπολις

40) α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 5x + 6$. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

41) Σε μία διαίρεση πολυωνύμων με διαιρετέο ένα πολυώνυμο P(x) δίνονται: ο διαιρέτης $\delta(x) = x^2 + x$, το πηλίκο $\pi(x) = 2x - 3$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x) = x + \lambda$ της διαίρεσης αυτής όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + \lambda$.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα τον –1.

γ) για λ = 1 να λυθεί η εξίσωση P(x) = 0.

42) Αν $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ και $2\eta\mu^3 x - 3\eta\mu^2 x - 11\eta\mu x + 6 = 0$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημ2x , συν2x και εφ2x.

43) Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^{45} + x^{35} + x^{25} + x^{15} + x^5 + x$.

α) βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το $x^2 - 1$.

β) δείξτε ότι πολυώνυμο $f(x) = P(x - 1) + P(x - 2) + P(2x - 1) - x^2 + 1$ έχει παράγοντα το x – 1.

44) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x - 6$. Να προσδιορίσετε τα α, β∈R ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$. Έπειτα για τις τιμές αυτές να λυθεί η εξίσωση P(x) = 0.

45) Αν το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 1$ έχει παράγοντα το x – 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με x + 2 είναι 3, να βρείτε τους αριθμούς α και β.

46) Δίνεται το πολυώνυμο P(x) το οποίο διαιρούμενο με x – 2 δίνει υπόλοιπο 1, ενώ διαιρούμενο με το x + 3 δίνει υπόλοιπο –9.

α) Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x - 6)$.

β) Αν το πηλίκο π(x) της παραπάνω διαίρεσης είναι $\pi(x) = x^2 + 1$ να βρείτε το P(x).

47) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = [(\kappa + 1)x^3 + 2x^2 + \lambda x + \mu - 2] + [3x^3 + \nu x^2 + 6x + 1]$.

Να βρείτε τα κ, λ, μ, ν∈R για να έχει βαθμό :

α) 3 β) 1 γ) 0 δ) το P(x) να είναι μηδενικό πολυώνυμο

48) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3$

α) Να αποδείξετε ότι το P(x) έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x – 3.

β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

Ασκηπόπολις

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

49) Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 > 0$.

50) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\alpha - 1)^{2 - \text{συν}^2 x - 4\text{ημ}^2 \frac{x}{2}}$

α) Για ποιές τιμές του $\alpha \in R$ η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1$ αν $0 < \alpha^3 - 3\alpha^2 + 4\alpha - 1 \neq 1$.

51) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases}$

52) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda-1)^x}{3^x}$ με $x \in R$. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες:

α) Η f(x) είναι εκθετική συνάρτηση.

β) Η f(x) είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Αν λ = 10 να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x + 1) = 36$.

53) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} e^x \cdot e^{y+1} = 1 \\ e^{x-1} : e^y = e^2 \end{cases}$

54) Να λυθεί η εξίσωση $9^{\text{ημ}x} - 2 \cdot 3^{\text{ημ}x} - 3 = 0$.

55) Να λυθούν οι εξισώσεις: α) $\sqrt{2^x} = 4^{x^2}$ β) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$.

56) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - e) - 1$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) < f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

57) Έστω $f(x) = \ln(g(x) - 5)$, $g(x) = 5^x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

58) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - f(1) = 0$.

Αθκηρόπολις

59) Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \ln(2^{x+1} + 3^x + 2^x)$, $g(x) = \frac{x+1}{2}\ln 9$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g . β) Να λυθεί η ανίσωση f(x) > g(x).

60) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln(e^{x^2} - 1)$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f(x) και g(x).

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x).

γ) Να λύσετε την ανίσωση f(x) > g(x).

61) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln |\ln(x - 2)|$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f(x).

β) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f(x) με τον άξονα x΄x.

62) α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο $f(x) = \log(-x^2 + 5x - 6)$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\lambda = 10^{1 - \log 2}$.

γ) Για λ = 5, να λύσετε την ανίσωση $-e^{2x} + \lambda \cdot e^x - 6 > 0$.

63) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 2.

γ) Αν x > 6 να λυθεί η ανίσωση f(x) > 1.

64) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(4^x - 8)$.

α) Να βρείτε για ποιές τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 7 + x \cdot \log 2$.

65) Να λυθεί η ανίσωση $\log(3x + 6) > \log(x + 4)$.

66) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Αν $g(x) = \ln(e^x - 1)$ τότε να λύσετε την ανίσωση f(x) > g(x).

γ) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 2x.

67) Αν $f(x) = \frac{2\ln x + 1}{2\ln x - 1}$ να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$

68) α) Αποδείξτε ότι: $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8 - \frac{1}{5}\log 32 = 1 - \log 2$.

Αθηρόπουλος

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των εξισώσεων:

$x(\log 10 - \log 5) = \log(4^x - 12)$ και $e^{\ln x^2} - 10^{\log 3x} = -2$

69) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \log(x^2 - 4) - \log(3|x|)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασή της δεν τέμνει τον άξονα ψψ' .

γ) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0.

70) α) Να λυθούν οι ανισώσεις i) $\ln x - \ln 2 \geq 0$ ii) $\ln^2 x - \ln x \geq 0$

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{\dfrac{\ln^2 x - \ln x}{\ln x - \ln 2}}$.

71) Έστω συνάρτηση f με $f(x) = \log(2 + 10^x)$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) > \log 2$ για κάθε $x \in R$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(\log 2) = 2\log 2$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2x.

72) α) Να αποδείξετε ότι $\log 3 + 2\log 4 - \log 12 = 2\log 2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $100^x - \log 100^3 \cdot 10^x + 8 = 0$.

73) α) Να λυθεί η εξίσωση $\ell og(x^2 + 2) - \ell og x = \ell og 3$

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = 4 + \ell og(2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2)$.

74) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln(2x-1)}{\ln(x-2)}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 2.

75) α) Να λυθεί η εξίσωση $3 \cdot 3^{\log x} + 3^{3 - \log x} = 82$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{1}{3} < 3^{\log x} < 27$.

76) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{2x} - 3e^x)$.

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < \ln 4$.

77) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \log(x - 2) - 2$

Δοκηστόπολις

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρεθούν τα σημεία (εάν υπάρχουν) στα οποία η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες x΄x και ψ΄ψ.

γ) Αν το σημείο Α(κ, –1) ανήκει στη γραφική παράσταση της f να βρεθεί ο $\kappa \in R$.

78) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(2e^{2x} - 2)$ και $g(x) = \ln(5e^{x} + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x).

79) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$.

α) Για ποιά x ορίζεται η συνάρτηση;

β) Να βρείτε το f(1), τί συμπεραίνετε για τον αριθμό 1;

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x}) > e^{2x-7} + x - 1$.

80) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(2^{2x} - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x).

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln(4^{x} - 3^{x} + 2)$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\left(\frac{2004}{2005}\right)^{x^2-3x} < \left(\frac{2005}{2004}\right)^{2x-6}$

81) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^{x} - 1) + \ln(e^{x} - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να αποδείξετε ότι $f(\ln 3) + f(\ln 4) - \ln 4 = \ln 3$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2.

82) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(e^{x+1} - 1) + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in R$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Αν f(0) = 1 και f(1) = 0 να βρείτε τις τιμές των α, β.

83) α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(2 - \sqrt{x+1})$

β) Να επιλύσετε την ανίσωση $x^{\log x} < 10$.

84) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - 2x^2\ln\alpha^2 + 5x\ln\alpha - 2$ $(\alpha > 0)$

α) Αν το x – 1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου f(x), τότε να βρείτε το α.

β) Για α = e

i. Να δείξετε ότι το $(x - 1)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου f(x).

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x

Ασκηπόπολις

85) α) Να λύσετε την εξίσωση $100^x - 10^{x+1} + 9 = 0$.

β) Αν $100^x - 10^{x+1} + 9 < 0$ να δείξετε ότι $0 < x < \log 9$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(100^x - 10^{x+1} + 9) \cdot \log x > 0$.

86) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x + 1)$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Εάν η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x) + \lambda$ με $\lambda \in R$, διέρχεται από το σημείο A(99, 1) να βρεθεί ο λ.

87) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + \ln(e^{2x} - e^x)$ και $g(x) = \ln(e^{2x+2} - e^{x+2})$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A των συναρτήσεων f και g.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να λύσετε την $f(x) \geq g(x)$.

88) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \dfrac{x+1}{1-x}$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln \dfrac{3}{\ln e^{2x}}$

89) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \log(x^3 - 3x^2 + x + 2)$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) + f(1) + f(3) = 1$.

Ασκηπόπολις

89 Επαναληπτικά θέματα – Β' Άλγεβρα

Ασκήσεις

3) ii) $D=-5\neq 0$ iii) $\lambda=-1,\ \mu=2$

8) α) $\alpha\neq 4$ β) $\alpha=4,\ \beta\neq 3$ γ) $(x, 4x+3)$

9) β) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

10) $|\eta\mu x|=1$ → $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2}$

12) $\eta\mu\frac{x}{2}\left(\eta\mu\frac{x}{2}+1\right)=0$ ... $x=4k\pi$ ή $4k\pi+2\pi$ ή $4k\pi-\pi$ ή $4k\pi+3\pi$

13) $x=k\pi+\frac{\pi}{12}$, $x=k\pi+\frac{5\pi}{12}$

14) α) $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $x=2k\pi\pm\pi$ β) $x=2k\pi$, $x=2k\pi+\pi$, $\sigma\upsilon\nu 2x=1$

15) α) $\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ β) $\frac{1}{2}$ γ) $\varepsilon\varphi x=\sqrt{3}\rightarrow x=\frac{4\pi}{3}$

18) $(2\eta\mu x+1)(2\sigma\upsilon\nu x+\sqrt{3})=0$ ...

22) β) $\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$, $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$

23) β) $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

24) γ) $x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{7\pi}{12}$ ή $x=-2k\pi+\frac{\pi}{4}$

25) β) $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$ γ) $\frac{\pi}{6}$

26) 4 και -2, $\frac{3\pi}{8}$

27) α) 2 και -2, $T=6\pi$ β) $x=2k\pi\pm\pi$

28) γ) $x<-1$ ή $x>3$

29) β) $\pm 1, \pm 2, -3$

30) α) $2, -1$ β) $x=1, \pm 2$

31) α) -1 β) $P(x)=(x^2-x+3)(x+3)+7x-3$

32) β) $0, 1$

33) β) $k=2$ γ) $1, 3, -2$

34) α) $\alpha=1,\ \beta=-1$ β) $-1\leq x\leq 1$ ή $x\geq 2$

35) $0, \frac{\pi}{3}$

36) β) $x \geq -1$

37) β) i) -4 ii) $(x-3)(x-1)(x+2)$

38) α) $\lambda=3$ β) $\Pi(x)=3x^2+2x-2$ γ) $x>\frac{1}{3}$

39) γ) $-\frac{1-\sqrt{33}}{4}<x<1$ ή $x>\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

40) α) $(\frac{3}{2},0), (-2,0), (0,6)$ β) $-2<x<1$ ή $x>\frac{3}{2}$

41) γ) $-1, 1, \frac{1}{2}$

42) $\eta\mu x=\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ΚΤΛ

43) $\upsilon(x)=6x$

44) $5\pm\sqrt{31}$

45) $\alpha=0$, $\beta=1$

46) $P(2)=1$, $P(-3)=-9$, $\upsilon(x)=2x-3$, $P(x)=(x^2+x-6)(x^2+1)+2x-3$

47) α) $k\neq-4$ β) $k=-4$ και $\nu=-2$ γ) $k=-4$, $\nu=-2$, $\lambda=-6$, $\mu\neq1$ ΚΤΛ

48) β) $1, 3$ γ) $1<x<3$

49) $x<-1$ ή $1<x<3$ ή $x>5$

50) α) $\alpha>1$ β) $\alpha\neq1$, $x=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}$

51) $x=21$, $y=6$

52) α) $1<\lambda<4$ ή $\lambda>4$ β) $\lambda>4$ γ) $x=2$

53) $x=1$, $y=-2$

54) $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

55) α) $x=0, \frac{1}{4}$ β) $x=1$

56) α) $x>1$ β) $x=\ln 2+1$ γ) $1<x<2$

57) α) $x>1$ β) $x=\log_5 6$ ή $x=\frac{\ln 6}{\ln 5}$

58) α) $x>0$ β) $x=\frac{1}{2}$

59) α) $A_f=\mathbb{R}$, $A_g=\mathbb{R}$ β) $x<1$

60) α) $x>0$ και $x\neq 0$ β) $x=1$ γ) $0<x<1$

61) α) $x>2$ β) $(e+2,0)$, $(\frac{1}{e}+2,0)$

62) α) $2<x<3$ β) $\lambda=5$ γ) $\ln 2<x<\ln 3$

63) α) $5<x<6$ ή $x>6$ β) $x=9$ γ) $f(x)>1 \Leftrightarrow x>3$, οπότε $\boxed{x>6}$

64) α) $x>\frac{3}{2}$ β) $x=3$

65) Π.Ο: $x>-2$ άρα $\boxed{x>-1}$

66) α) $x\neq 0$ β) $x<0$ ή $x>\ln 2$ γ) $x=-\ln 2$

67) $A_f=(0,\sqrt{e})\cup(\sqrt{e},+\infty)$, ισχύει $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{f(x)}$, τελικά: $x=e$ ή $x=\frac{1}{e}$

68) β) $x=2$

69) α) $x<-2$ ή $x>2$ β) $f(0)$ δεν ορίζεται γ) $x=\pm 4$

70) α) i. $x\geq 2$ ii. $0<x\leq 1$ ή $x\geq e$ β) $1<x<2$ ή $x>e$

71) α) $10^x>0$ γ) $x=\log 2$

72) β) $x=\log 4$ ή $x=\log 2$

73) α) για $x>0$ είναι $x=1,2$ β) $x<0$ ή $x>2$

74) α) $2<x<3$ ή $x>3$ β) αδύνατη

75) α) $x=1000$, $x=\frac{1}{10}$ β) $\frac{1}{10}<x<1000$

76) α) $x>\ln 3$ β) $\ln 3<x<\ln 4$

77) α) $x>2$ β) $(102,0)$, για ψ δεν υπάρχει γ) $k=12$

78) α) $A_f=(0,+\infty)$, $A_g=\mathbb{R}$ β) $x=\ln 3$

79) α) $x>0$ β) $f(1)=0$, ρίζα γ) $0<x<7$

80) α) $x>0$ β) $x=1$ γ) $x<-2$ ή $x>3$

81) α) $x>\ln 2$ γ) $x=\ln\left[\frac{3+\sqrt{1+4e^2}}{2}\right]$

82) α) $x>-1$ β) $\alpha=-\log[10(e+1)]$ και $\beta=\log\frac{10}{e-1}$

83) α) $-1<x<3$ β) $\frac{1}{100}<x<10$

84) β) ii. $x<2$

85) α) $x=0, \log 9$ γ) $x>9$

86) α) $x>-1$ β) $\lambda=-1$

87) α) $A_f=(0,+\infty)$, $A_g=(0,+\infty)$ β) $x=2$ γ) $x\geq 2$

88) α) $-1<x<1$ β) $x=\frac{1}{2}$

89) α) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<2$ ή $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$