ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 7

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

Δίνεται η συνεχής στο R συνάρτηση f για την οποία είναι

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left[f(-1)+1\right]x^4+x-1}{x^2+2x}=-\infty$
- f(x)(f(x)-2x)=1, για κάθε xεR

i. Να δείξετε ότι f(-1)<-1.

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, xεR.

iii. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(\kappa-1)x-f(x)\right]$, για τις διάφορες τιμές του κεR.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε), της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει γωνία ω=$\dfrac{\pi}{4}$ με τον xx'.

v. Να δείξετε ότι f(x)<0 για κάθε xεR.

Αν g(x)=ln(-f(x))

vi. Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.

vii. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x+1)-g(x)\right]$.

viii. Να δείξετε ότι υπάρχει η g^{-1}, την οποία και να προασιορίσετε.

ix. Να δείξετε ότι η g είναι περιττή και να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{1}g(x)\,dx$.

x. Υλικό σημείο Μ κινείται στην γραφική παράσταση της g. Αν η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό 2μ/sec, βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, όταν το σημείο περνά από την αρχή των αξόνων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 7 — ΛΥΣΗ

i) Αν $f(-1)=-1$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[f(-1)+1]x^4+x-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=0, \text{ άτοπο.}$$

Οπότε $f(-1)+1\neq 0$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[f(-1)+1]x^4+x-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{[f(-1)+1]x^4}{x^2}=[f(-1)+1]\cdot\lim_{x\to+\infty}x^2=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } f(-1)+1>0\\ -\infty, & \text{αν } f(-1)+1<0\end{cases}$$

Άρα, $f(-1)+1<0 \Leftrightarrow f(-1)<-1$

ii) $\forall\, x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)[f(x)-2x]=1\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1\Leftrightarrow[f(x)-x]^2=x^2+1\xLeftrightarrow{x^2+1>0}$$

$$\Leftrightarrow |f(x)-x|=\sqrt{x^2+1} \quad (1)$$

Έστω $\varphi(x)=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$, που είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών και $|\varphi(x)|=\sqrt{x^2+1}\neq 0 \Rightarrow \varphi(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Οπότε, η φ διατηρεί πρόσημο. Όμως $\varphi(-1)=f(-1)+1<0$. Άρα, $\varphi(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Η $(1)\Leftrightarrow -\varphi(x)=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

iii) Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}[(\kappa-1)x-f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[(\kappa-1)x-x+\sqrt{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(\kappa-2)x+\sqrt{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[(\kappa-2)x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right]$$

$$\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\left[(\kappa-2)x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\kappa-2+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=(+\infty)\cdot\left(\kappa-2+\sqrt{1+0}\right)=$$

$$=(+\infty)(\kappa-1)=\begin{cases}+\infty, & \text{αν } \kappa>1\\ -\infty, & \text{αν } \kappa<1\end{cases}$$

Αν $\kappa=1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(\kappa-2)x+\sqrt{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$\overset{x>0}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0.$$

$$\text{Άρα, } \lim_{x\to+\infty}[(\kappa-1)x-f(x)]=\begin{cases}-\infty, & \text{αν } \kappa<1\\ 0, & \text{αν } \kappa=1\\ +\infty, & \text{αν } \kappa>1\end{cases}$$

iv) Έστω $K(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Θα είναι:

$$f'(x_0)=\lambda_\varepsilon=\varepsilon\varphi\omega\Rightarrow 1-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}}=1\Rightarrow x_0=0\longrightarrow K(0,-1).$$

Άρα, $(\varepsilon): y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\longrightarrow(\varepsilon): y=x-1$

v) Αρκεί να δείξουμε ότι: $x<\sqrt{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (2)

- Αν $x\le 0$, η (2) προφανώς ισχύει.
- Αν $x>0$, η (2) $\Leftrightarrow x^2<x^2+1 \Leftrightarrow 1>0$, που ισχύει

Άρα, $f(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

vi) Πρέπει $-f(x)>0 \Leftrightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. Είναι: $g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι: $$g'(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)'}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}\Rightarrow g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

Επιπλέον, η g είναι συνεχής, οπότε $g\downarrow\mathbb{R}$. Έχουμε:

$g(\mathbb{R})\overset{g\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}g(x),\ \lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)\Rightarrow g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, αφού:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(\sqrt{x^2+1}-x)\overset{(iii)}{=}\lim\limits_{u\to0}\ln u=-\infty$

- $$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x\right)\overset{x<0}{=}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\ln\left[-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)\right]=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$$

vii) Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x+1)-g(x)]=\lim_{x\to-\infty}[\ln(\sqrt{x^2+2x+2}-x-1)-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)]=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-x}\overset{x<0}{=}\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\ln\frac{\sqrt{1+0+0}+1+0}{\sqrt{1+0}+1}=\ln 1=0$$

viii) Η g είναι 1-1 ως γν. φθίνουσα, οπότε αντιστρέφεται. Είναι $D_{g^{-1}}=g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$ και $y\in\mathbb{R}$ είναι: $g(x)=y\Leftrightarrow x=g^{-1}(y)$ (3).

Έστω $g(x)=y$. Έχουμε: $\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-x=e^y\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=x+e^y\Leftrightarrow$

$\overset{x^2+1>0}{\Longleftrightarrow}\cancel{x^2}+1=\cancel{x^2}+2xe^y+e^{2y}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}(e^{-y}-e^y)\overset{(3)}{=}g^{-1}(y)$.

Άρα, $g^{-1}(x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

ix) • $\forall x\in D_g$ είναι: $-x\in D_g$

- Είναι: $g(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{(\sqrt{x^2+1}-x)}=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

Άρα, η g είναι περιττή.

Έχουμε: $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx$ (4)

Όμως: $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx \overset{u=-x}{=\!=} \int_{1}^{0} -g(-u)\,du \overset{g:\text{περιττή}}{=\!=\!=} -\int_{0}^{1} g(x)\,dx$ (5)

Η (4) $\overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 0$.

x) Είναι: $y(t) = \ln\left(\sqrt{x^2(t)+1} - x(t)\right)$. Έτσι:

$$y'(t) = \frac{\left(\sqrt{x^2(t)+1} - x(t)\right)'}{\sqrt{x^2(t)+1} - x(t)} = \frac{\dfrac{x(t)x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+1}} - x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+1} - x(t)} \rightarrow y'(t) = -\frac{x'(t)}{\sqrt{x^2(t)+1}}$$

Για το Μ είναι: $x_M(t_0) = 0$ και $x'_M(t_0) = -2\ m/sec$ Άρα, $y'_M(t_0) = 2\ m/sec$

Επιμέλεια λύσης: Ελευθερίου Ν.