ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 10

ΕΛΕΥΘΕΡΙΟΥ Γ.

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία $f(x)=3^x+x^5+2x,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1}, της οποίας να βρείτε το πεδίο ορισμού.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(-1,0)$, για το οποίο $x_0=f^{-1}(x_0)$

iii. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)+2\sigma\upsilon\nu\, f(x)}{3f(x)+\eta\mu\, f(x)}\right)$

β. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2018}{(f(x)-x)^{2\nu-2}}=+\infty$, όπου $\nu\in\mathbb{N}$ και x_0 η ρίζα του ii . ερωτήματος

iv. Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου το οποίο περικλείεται , από τη γραφική παράσταση της f, τους άξονες xx΄ , yy΄ και την ευθεία x=1.

v. Βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_0=0$ και να αποδείξετε ότι $f(x)>\ln(3e^2)x+1$ για κάθε x>0.

vi. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(x-1+x_0)}{x-2}=\dfrac{f(x_0-e^{x-1})}{x-1}$, όπου x_0 η ρίζα του ii , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΘΕΜΑ 10 ΛΥΣΗ

i) Είναι $f'(x)=3^x\cdot \ln 3+5x^4+2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής. Οπότε, $f\uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f: 1-1$. Άρα, ορίζεται η f^{-1}. Έχουμε:

$f(\mathbb{R}) \overset{f\uparrow}{=} (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = (-\infty,+\infty)=\mathbb{R} \to D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$, αφού:

- $\lim_{x\to-\infty}(3^x+x^5+2x)=0+(-\infty)+(-\infty)=-\infty$,
- $\lim_{x\to+\infty}(3^x+x^5+2x)=(+\infty)+(+\infty)+(+\infty)=+\infty$

ii) Έχουμε την εξίσωση: $x=f^{-1}(x) \overset{D_f=D_{f^{-1}}=\mathbb{R}}{\Longleftrightarrow} f(x)=f(f^{-1}(x)) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^x+x^5+x=0$.

Έστω $g(x)=3^x+5^x+x$, $x\in[-1,0]$. Η g είναι συνεχής και $g(-1)=-\frac{5}{3}$ και $g(0)=1$, δηλαδή $g(-1)\cdot g(0)<0$. Οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(-1,0)$: $g(x_0)=0$. Επιπλέον,
$g'(x)=3^x\cdot \ln 3+5x^4+1>0$, $\forall x\in[-1,0]$, δηλαδή $g\uparrow[-1,0]$, οπότε και $1-1$.
Άρα, η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow x=f^{-1}(x)$, έχει μοναδική λύση $x_0\in(-1,0)$.

iii) α) Έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+2\sigma\upsilon\nu f(x)}{3f(x)+\eta\mu f(x)} \overset{u=f(x)}{=\!=} \lim_{u\to+\infty}\frac{u+2\sigma\upsilon\nu u}{3u+\eta\mu u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1+2\frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}}{3+\frac{\eta\mu u}{u}} \qquad (1)$$

Για u κοντά στο $+\infty$ ισχύει:

$$\left|\frac{\eta\mu u}{u}\right|\le\left|\frac{1}{u}\right| \Leftrightarrow -\left|\frac{1}{u}\right|\le\frac{\eta\mu u}{u}\le\left|\frac{1}{u}\right| \text{ και } \lim_{u\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{u}\right|\right)=\lim_{u\to+\infty}\left|\frac{1}{u}\right|=0$$

Έτσι, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, είναι:

$\lim_{u\to+\infty}\frac{\eta\mu u}{u}=0$. Ομοίως, $\lim_{u\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu u}{u}=0$.

Άρα, $(1) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+2\sigma\upsilon\nu f(x)}{3f(x)+\eta\mu f(x)}=\frac{1}{3}$.

β) Η f είναι συνεχής, οπότε: $\lim_{x\to x_0}[f(x)-x]^{2\nu+2}=[\lim_{x\to x_0}(f(x)-x)]^{2\nu+2}=$
$=(f(x_0)-x_0)^{2\nu+2} \overset{(ii)}{=} 0$.

Ακόμη, $[f(x)-x]^{2\nu+2}>0$ κοντά στο x_0. Άρα,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{2018}{[f(x)-x]^{2\nu+2}}=+\infty.$$

iv) $\forall x\in[0,1]$ είναι: $x>0 \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f(x)>f(0)=1 \Leftrightarrow f(x)>0$. Είναι:

$$E=\int_0^1|f(x)|\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(3^x+x^5+2x)\,dx=\left[\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{x^6}{6}+x^2\right]_0^1 \to$$

$$\to E=\left(\frac{2}{\ln 3}+\frac{7}{6}\right) \text{ τ.μ.}$$

v) Είναι: $(\varepsilon): y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow (\varepsilon): y-1=(\ln 3+2)\cdot x \Leftrightarrow (\varepsilon): y=\ln(3e^2)x+1$.

Έχουμε: $f''(x)=3^x\cdot \ln^2 3+20x^3,\ x\in\mathbb{R}$ και η f'' είναι συνεχής.

Ακόμη $f^{(3)}(x)=3^x\cdot \ln^3 3+60x^2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, οπότε $f'': \uparrow$

Έτσι, είναι: $x>0 \xLeftrightarrow{f'':\uparrow} f''(x)>f''(0)=\ln^2 3 \Rightarrow f''(x)>0$. Οπότε, η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, δηλαδή βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της με εξαίρεση το σημείο επαφής. Άρα:

$f(x)>\ln(3e^2)x+1,\ \forall x>0$.

vi) Έχουμε: $\dfrac{f(x-1+x_0)}{x-2}=\dfrac{f(x_0-e^{x-1})}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)\cdot f(x-1+x_0)-(x-2)\cdot f(x_0-e^{x-1})=0$

Έστω $h(x)=(x-1)\cdot f(x-1+x_0)-(x-2)\cdot f(x_0-e^{x-1}),\ x\in[1,2]$.

Η h είναι συνεχής και $h(1)=f(x_0-1)$ και $h(2)=f(x_0+1)$. Έχουμε:

- $x_0\in(-1,0) \Rightarrow x_0-1<-1 \xLeftrightarrow{f:\uparrow} f(x_0-1)<f(-1)<0 \rightarrow h(1)<0$.
- $x_0\in(-1,0) \Rightarrow x_0+1>0 \xLeftrightarrow{f:\uparrow} f(x_0+1)>f(0)>0 \rightarrow h(2)>0$

Οπότε, $h(1)\cdot h(2)<0$. Άρα, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0$ έχει ρίζα στο $(1,2)$.

Επιμέλεια λύσης: Ελευθερίου Ν.