

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΔΥΟ ΩΡΩΝ ΚΑΙ 30ΛΕΠΤΩΝ
ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[α, β]$ και $f(α) \neq f(β)$, τότε για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $f(x_0) = \xi$.

Μονάδες 12

B. Πότε μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Μια συνεχής συνάρτηση f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές της ρίζες χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 2

β. Σε μία συνεχή συνάρτηση f αν $f(x_0) > 0, x_0 \in A_f$ τότε $f(x) > 0$ σε μία περιοχή του x_0 .

Μονάδες 2

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0, x_0 \in A_f$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 2

δ. Αν για τη συνεχή συνάρτηση $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(α) < f(β)$ τότε το σύνολο

τιμών της f είναι το $[f(α), f(β)]$.

Μονάδες 2

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.

α) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής.

β) Να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[-1, 1]$

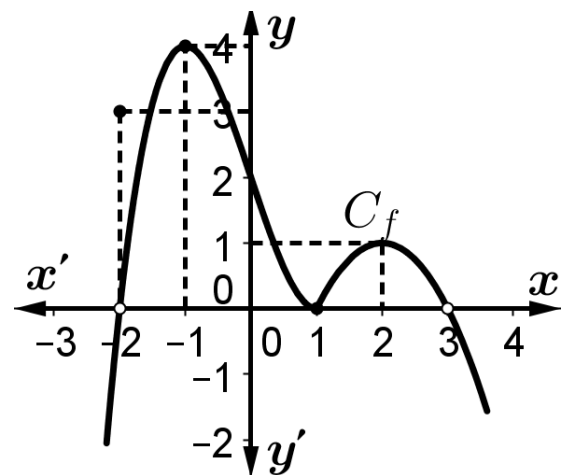
γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

δ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = -x^3 - 3x + 15, x \in [-4, 4]$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = (f + g)(x)$.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$.



(Μονάδες 5+5+5+5+5)

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει :

- $x \cdot f(x) \leq \eta\mu 2x$ (1).
- $|xg(x) - \sigma\upsilon\nu 3x + 1| \leq x^2$ (2)
- $f(1) < g(1)$ (3)

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(0) = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση h για την οποία ισχύουν :

- $A_h = \mathbb{R}$
- $h^2(x) - 4e^x \cdot h(x) = 4 - 3e^{2x} - 4e^x$.
- $h(0) = 3$
- $h(1) = 3e - 2$

α) Να δείξετε ότι $h(x) = \begin{cases} 3e^x - 2, & x \geq \ln 2 \\ e^x + 2, & x < \ln 2 \end{cases}$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της h .

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = -2$ είναι αδύνατη.

(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα ακριβώς $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $h(\gamma) = \frac{h(\alpha) + h(\beta)}{2}, \alpha < \ln 2 < \beta$.

(Μονάδες 6)

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία

B. Θεωρία

Γ. ΛΣΣΛ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{-2, 3\}$. Δεν είναι συνεχής στο -2 αφού

$$f(-2) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0.$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, $f(-1) = 4 \neq f(1) = 0$ οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[-1, 1]$.

γ) $0 = f(1) < \frac{\sqrt{3}}{2} < f(-1) = 4$ οπότε από το β) υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιο

$$\text{ώστε } f(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

δ) i) $A_h = A_f \cap A_g = [-4, 4] \cap \mathbb{R} - \{3\} = [-4, 3) \cup (3, 4]$.

ii) Θεωρούμε το διάστημα $A_1 = (2, 3)$.

Έστω $x_1, x_2 \in (2, 3)$ με

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \searrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \quad (1).$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \quad (2).$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -3x_1 > -3x_2 \Leftrightarrow -3x_1 + 15 > -3x_2 + 15 \quad (3).$$

$$(2) + (3) \Rightarrow -x_1^3 - 3x_1 + 15 > -x_2^3 - 3x_2 + 15 \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2) \quad (4)$$

$$(1) + (4) \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2) \Leftrightarrow (f+g)(x_1) > (f+g)(x_2) \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 .

$$h(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \right) = (-21, 2) \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x) + g(x)) = 1 + 1 = 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (f(x) + g(x)) = 0 - 21 = -21$$

Το $0 \in h(A_1)$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in A_1 = (2, 3)$ τέτοιο

ώστε $h(\xi) = 0$.

Το ξ είναι μοναδικό αφού η h είναι γνησίως φθίνουσα και 1-1.

ΘΕΜΑ 3ο

α) Για $x > 0$: $(2) \Rightarrow f(x) \leq \frac{\eta\mu 2x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{x} \Leftrightarrow f(0) \leq 2 \quad (4).$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{x} \stackrel{u=2x}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow u \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu u}{\frac{u}{2}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} 2 \frac{\eta\mu u}{u} = 2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu 2x}{x} \right).$$

Για $x < 0$: $(2) \Rightarrow f(x) \geq \frac{\eta\mu 2x}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\eta\mu 2x}{x} \Leftrightarrow f(0) \geq 2 \quad (5)$

$(4), (5) \Rightarrow f(0) = 2.$

$$\beta) |xg(x) - \sigma\upsilon\nu 3x + 1| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq xg(x) - \sigma\upsilon\nu 3x + 1 \leq x^2 \Leftrightarrow \\ \sigma\upsilon\nu 3x - 1 - x^2 \leq xg(x) \leq x^2 + \sigma\upsilon\nu 3x - 1 \quad (6).$$

$$\Gamma\iota\alpha \quad x > 0 : (6) \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x} - x \leq g(x) \leq x + \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x} - x \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x} \right) \quad \text{αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu 3x - 1}{x} \stackrel{h=3x}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+ \Rightarrow h \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{\frac{u}{3}} = \lim_{u \rightarrow 0^+} 3 \frac{\sigma\upsilon\nu u - 1}{u} = 3 \cdot 0 = 0.$$

οπότε από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 = g(0)$ αφού η g είναι συνεχής .

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$h(0) = f(0) - g(0) = 2 - 0 = 2 > 0.$$

$$h(1) = f(1) - g(1) < 0 \quad \text{από (3)}.$$

Άρα $h(0) \cdot h(1) < 0$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (0,1) : h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$.

Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

$$α) \quad h^2(x) - 4e^x \cdot h(x) = 4 - 3e^{2x} - 4e^x \Leftrightarrow h^2(x) - 4e^x \cdot h(x) + 4e^{2x} = e^{2x} - 4e^x + 4 \Leftrightarrow \\ (h(x) - 2e^x)^2 = (e^x - 2)^2 \quad (1).$$

$$e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2.$$

Η συνάρτηση $f(x) = h(x) - 2e^x \neq 0$ για $x \neq \ln 2$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, \ln 2), (\ln 2, +\infty)$.

$$f(0) = h(0) - 2 = 3 - 2 = 1 > 0 \quad \text{άρα } f(x) > 0 \text{ στο } (-\infty, \ln 2) .$$

$$(1) \Rightarrow f^2(x) = (e^x - 2)^2 \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = -e^x + 2 \Leftrightarrow h(x) - 2e^x = -e^x + 2 \Leftrightarrow h(x) = e^x + 2, x < \ln 2 .$$

$$f(1) = h(1) - 2e = 3e - 2 - 2e = e - 2 > 0 \quad \text{άρα } f(x) > 0 \text{ στο } (\ln 2, +\infty) .$$

$$(1) \Rightarrow f^2(x) = (e^x - 2)^2 \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x - 2 \Leftrightarrow h(x) - 2e^x = e^x - 2 \Leftrightarrow h(x) = 3e^x - 2, x > \ln 2 .$$

Η h συνεχής στο \mathbb{R} άρα και στο 1 οπότε $h(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} (e^x + 2) = 4$.

$$\text{Επομένως η συνάρτηση } h \text{ έχει τύπο } h(x) = \begin{cases} 3e^x - 2, & x \geq \ln 2 \\ e^x + 2, & x < \ln 2 \end{cases}.$$

β) Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, \ln 2)$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} + 2 < e^{x_2} + 2 \Leftrightarrow h(x_1) < h(x_2)$ άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $A_1 = (-\infty, \ln 2)$.

$$h(A_1) \stackrel{h'}{\underset{\text{συνεχής}}{=}} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow \ln 2^-} h(x) \right) = (-2, 4) \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2) = 0 + 2 = 2 .$$

Έστω $x_3, x_4 \in (\ln 2, +\infty)$ με

$$x_3 < x_4 \Leftrightarrow e^{x_3} < e^{x_4} \Leftrightarrow 3e^{x_3} - 2 < 3e^{x_4} - 2 \Leftrightarrow h(x_3) < h(x_4) \quad \text{άρα η}$$

συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $A_2 = [\ln 2, +\infty)$ αφού είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

$$h(A_2) \stackrel{\text{h, } \nearrow}{\text{συνεχής}} \left[h(\ln 2), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \right) = [4, +\infty) \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3e^x - 2) = 3 \cdot (+\infty) - 2 = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της h είναι : $h(A) = h(A_1) \cup h(A_2) = (2, +\infty)$.

γ) Το 0 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της h οπότε η εξίσωση $h(x) = 0$ είναι αδύνατη.

δ) $h(A_1) \subset h(A_2)$ οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2h(x) - h(\alpha) - h(\beta)$.

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ σαν διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$g(\alpha) = 2h(\alpha) - h(\alpha) - h(\beta) = h(\alpha) - h(\beta) < 0 \quad \left(\alpha < \beta \Leftrightarrow h(\alpha) \stackrel{\text{h, } \nearrow}{<} h(\beta) \right)$$

$$g(\beta) = 2h(\beta) - h(\alpha) - h(\beta) = h(\beta) - h(\alpha) > 0.$$

Άρα $h(\alpha) \cdot h(\beta) < 0$ οπότε ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano δηλαδή

$$\text{υπάρχει } \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο ώστε } h(\gamma) = \frac{h(\alpha) + h(\beta)}{2}, \alpha < \ln 2 < \beta.$$

Το γ είναι μοναδικό αφού η h είναι γνησίως αύξουσα και 1-1.