ΣUMMA U blog - site 2018

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΟΜΑΔΕΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Τα sites – blogs που συμμετέχουν σε αλφαβητική σειρά:

blogs.sch.gr/pavtryfon/ Επιμελητής: Παύλος Τρύφων

eisatopon.blogspot.gr/ Επιμελητής: Σωκράτης Ρωμανίδης

evripidis.freebsdgr.org/ Επιμελητής: Θεμελής Ευριπίδης

lisari.blogspot.gr/ Επιμελητής: Μάκης Χατζόπουλος

perikentro.blogspot.gr/ Επιμελητής: Κώστας Κουτσοβασίλης

www.askisiologio.gr / Επιμελητής: Βασίλης Μποζατζίδης

www.askisopolis.gr / Επιμελητής: Στέλιος Μιχαήλογλου

www.mathink.gr/ Επιμελητής: Πάνος Γκριμπαβιώτης

Ημερομηνία: 20/5/2018

Έκδοση: 1η

Εισαγωγή

Σας ευχαριστούμε πολύ για τη θερμή αποδοχή και την ενθάρρυνση όλων των συναδέλφων αν κρίνουμε τα αναρίθμητα μηνύματα που δεχθήκαμε όλοι στα inbox μας.

Τα σχόλια και οι επισημάνσεις σας μας οδήγησαν να αναρτήσουμε μια ανανεωμένη έκδοση (έκδοση 2) στις εκφωνήσεις βελτιώνοντας μερικά σημεία του διαγωνίσματος.

Οποιαδήποτε ερώτηση, ένσταση ή σημείωση θέλετε να καταθέσετε μπορείτε να το κάνετε στο email lisari.blogspot@gmail.com.

«Η ισχύς εν τη ενώσει»

Αίσωπος, 620-560 π.Χ.

Θέμα Α

Α1. (*Παράγραφος 2.7 σελ. 142 νέο σχολικό βιβλίο – β΄ μέρος*)

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και

$$f(x) \le f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad (1)$$

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Επομένως,

- αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0 \quad (2)$$

- αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0 \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Α2. (*Παράγραφος 1.5 – σελ. 51 νέο σχολικό βιβλίο – β΄ μέρος*)

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h.

Αν

- $h(x) \le f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lambda$,

$$\text{τότε } \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda$$

Α3. α) Ψευδής

(*δείτε σχόλιο στην παράγραφο 2.6 - σελίδα 134 νέο σχολικό βιβλίο – β΄ μέρος*).

β) Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1 & ,x<0\\ 1 & ,x>0\end{cases}$. Παρατηρούμε ότι, αν και $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, εντούτοις η f δεν είναι σταθερή στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Α4. Σωστή απάντηση η iv) $y=x$

(*παράγραφος 1.3 - σελίδα 37 νέο σχολικό βιβλίο – β΄ μέρος*)

Α5. α) Λάθος β) Σωστό γ) Λάθος

Θέμα Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού, άρα είναι της μορφής

$$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \text{ για } x\in\mathbb{R} \text{ και } \alpha\neq 0$$

Επομένως ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x^{\nu}}\right)=1\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{x^{\nu}}=1\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3}{x^{\nu}}=1$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις

- Αν $\nu>3$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3}{x^{\nu}}=0\neq 1$ απορρίπτεται.
- Αν $\nu<3$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3}{x^{\nu}}=+\infty$ ή $-\infty$ για $\alpha>0$ ή $\alpha<0$ αντίστοιχα, απορρίπτεται.
- Αν $\nu=3$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha x^3}{x^3}=\alpha$.

Άρα $\alpha=1$ και η συνάρτηση έχει την μορφή: $f(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$. Ακόμα η f είναι περιττή. Εφόσον για κάθε $x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$ αρκεί και πρέπει $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα

$$\begin{aligned}f(-x)=-f(x)&\Leftrightarrow(-x)^3+\beta(-x)^2+\gamma(-x)+\delta=-\left(x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta\right)\\&\Leftrightarrow -x^3+\beta x^2-\gamma x+\delta=-x^3-\beta x^2-\gamma x-\delta\\&\Leftrightarrow 2\beta x^2+2\delta=0\Leftrightarrow(\beta=0 \text{ και } \delta=0)\end{aligned}$$

λόγω μηδενικού πολυωνύμου.

Άρα η συνάρτηση έχει την μορφή: $f(x)=x^3+\gamma x$, $x\in\mathbb{R}$.

Τέλος,

$$\int_{-1}^{1} f'(2x)\,dx = 14 \underset{\substack{x=1 \Rightarrow u=2 \\ x=-1 \Rightarrow u=-2}}{\overset{\substack{u=2x \\ du=2dx}}{\Leftrightarrow}} \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f'(u)\,du = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[f(u)\right]_{-2}^{2} = 14 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(f(2) - f(-2)\right) = 14 \Leftrightarrow \frac{1}{2}2f(2) = 14 \Leftrightarrow f(2) = 14 \Leftrightarrow 8 + 2\gamma = 14 \Leftrightarrow \gamma = 3$$

άρα τελικά $f(x) = x^3 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$.

Β΄ τρόπος:

$$\int_{-1}^{1} f'(2x)\,dx = 14 \Rightarrow \left[\frac{f(2x)}{2}\right]_{-1}^{1} = 14 \Rightarrow \frac{f(2)}{2} - \frac{f(-2)}{2} = 14 \Rightarrow \frac{f(2)}{2} + \frac{f(2)}{2} = 14 \Rightarrow$$

$$f(2) = 14 \Rightarrow 8 + 2\gamma = 14 \Rightarrow \gamma = 3$$

Β2. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f''(x) = 6x$.

Επομένως:

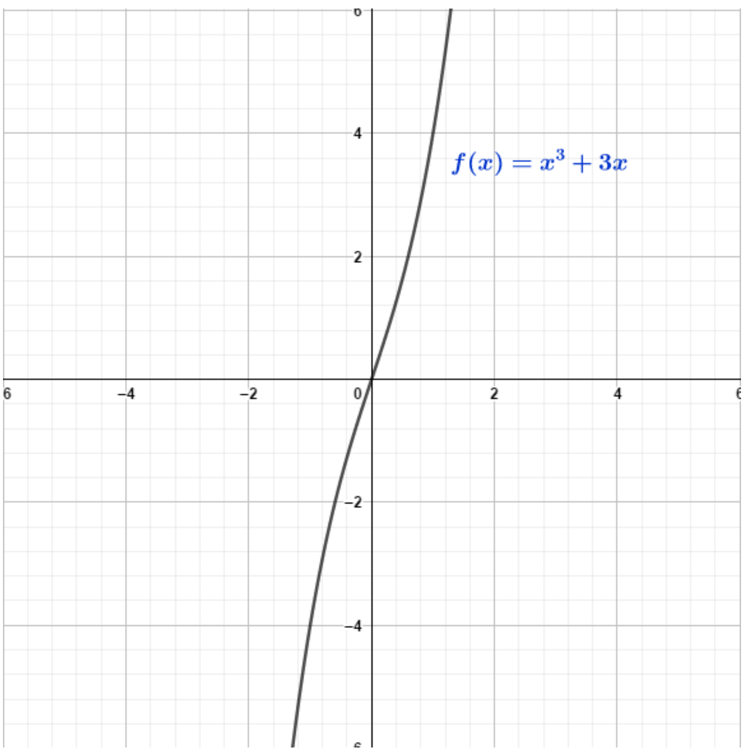
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και εμφανίζει σημείο καμπής στο σημείο $(0, f(0))$ που είναι η αρχή των αξόνων. Είναι πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού άρα δεν έχει ασύμπτωτες.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



B3. Έστω το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ και το σημείο $B\left(-x_0, f\left(-x_0\right)\right)$ το οποίο ταυτίζεται με το σημείο $\left(-x_0, -f\left(x_0\right)\right)$ λόγω του ότι η f είναι περιττή. Αρκεί να δείξουμε ότι οι συντελεστές διεύθυνσης των εφαπτομένων στα σημεία αυτά θα είναι ίσες. Πράγματι:

$$f'\left(x_0\right) = 3x_0^2 + 3 \text{ και } f'\left(-x_0\right) = 3\left(-x_0\right)^2 + 3 = 3x_0^2 + 3$$

Άρα οι εφαπτόμενες της C_f με αντίθετες τετμημένες είναι παράλληλες.

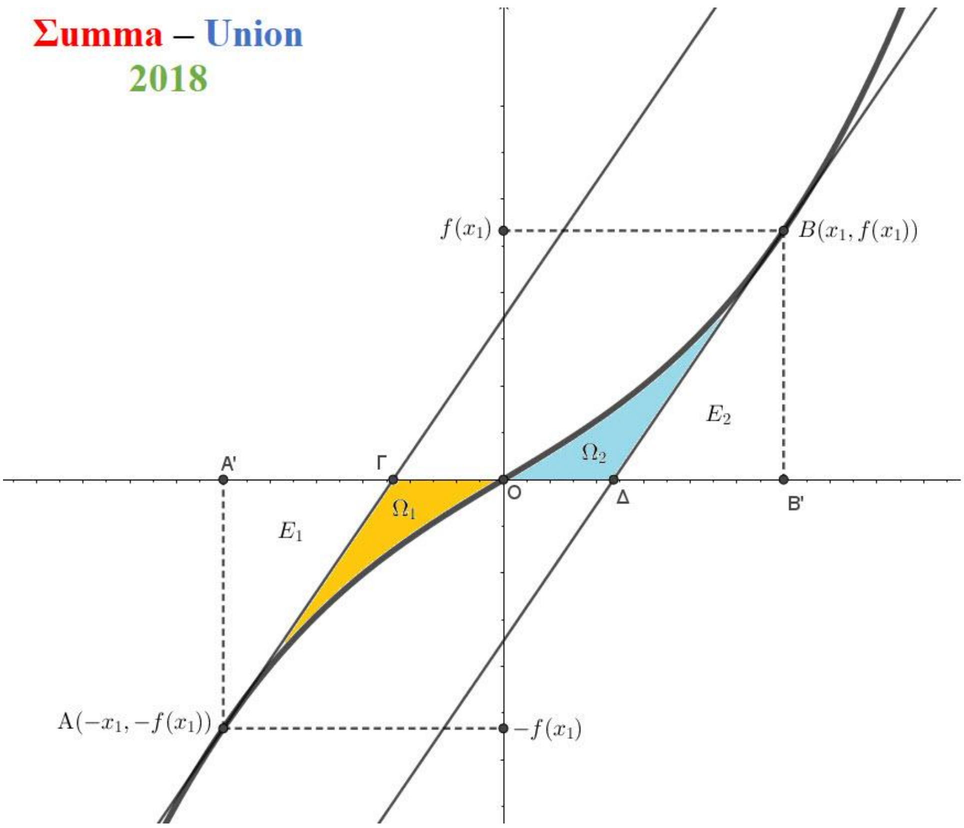
B΄ τρόπος:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$ άρα

$$f'\left(-x\right)\left(-x\right)' = -f'\left(x\right) \Rightarrow -f'\left(-x\right) = -f'\left(x\right) \Rightarrow f'\left(-x\right) = f'\left(x\right)$$

δηλαδή η συνάρτηση f' είναι άρτια άρα οι εφαπτόμενες σε αντίθετες τετμημένες έχουν ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

B4.



Έχουμε:

$$E\left(\Omega_1\right) = \int_{-x_1}^{0} \left(-f\left(x\right)\right)dx - E_1 \text{ και } E\left(\Omega_2\right) = \int_{0}^{x_1} f\left(x\right)dx - E_2$$

Παρατηρούμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $AA'\Gamma$, $BB'\Delta$ είναι ίσα, διότι:

- $A'\hat{\Gamma}A = B'\hat{\Delta}B$ ως οξείες γωνίες με πλευρές παράλληλες
- $AA' = BB'$ και ίσα με $\left|f\left(x_1\right)\right|$

άρα $E_1 = E_2$.

Αρκεί να δείξουμε ότι: $\int_{-x_1}^{0}\left(-f\left(x\right)\right)dx = \int_0^{x_1} f\left(x\right)dx$ (1)

Θέτουμε $u=-x$ άρα $du=-dx$ και για $x=-x_1$ είναι $u_1 = x_1$, ενώ για $x=0$ είναι $u_2=0$, άρα το πρώτο μέλος της ζητούμενης σχέσης (1) γίνεται:

$$\int_{-x_1}^{0}\left(-f\left(x\right)\right)dx = \int_{x_1}^{0}\left(-f\left(-u\right)\right)\left(-du\right) = -\int_{x_1}^{0} f\left(u\right)du = \int_0^{x_1} f\left(u\right)du$$

Επομένως, τα χωρία Ω_1, Ω_2 είναι ισεμβαδικά.

B΄ τρόπος:

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ δίνεται από την σχέση:

$$y - f\left(x_1\right) = f'\left(x_1\right)\left(x - x_1\right) \Leftrightarrow$$

$$y = \underset{\lambda}{f'\left(x_1\right)}\cdot x \underbrace{- f'\left(x_1\right)\cdot x_1 + f\left(x_1\right)}_{\beta} \Leftrightarrow y = \lambda x + \beta .$$

Η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τεταγμένη 0. Άρα

$$0 = \underset{\neq 0}{\lambda}\, x + \beta \Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{\lambda}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(-x_1, f\left(-x_1\right)\right)$ δίνεται από την σχέση:

$$y - f\left(-x_1\right) = f'\left(-x_1\right)\left(x + x_1\right) \Leftrightarrow$$

$$y + f\left(x_1\right) = f'\left(x_1\right)\left(x + x_1\right) \Leftrightarrow$$

$$y = \underset{\lambda}{f'\left(x_1\right)}\cdot x + \underbrace{f'\left(x_1\right)\cdot x_1 - f\left(x_1\right)}_{-\beta} \Leftrightarrow y = \lambda x - \beta .$$

Η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τεταγμένη 0. Άρα

$$0 = \underset{\neq 0}{\lambda}\, x - \beta \Leftrightarrow x = \frac{\beta}{\lambda}.$$

Το Ω_2 είναι το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΒΔ και το Ω_1 είναι το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΟΑΓ.

Έχουμε:

$$\Omega_1 = E_{\mu\epsilon\iota\kappa\tau.(OAA')} - (AA'\Gamma) = -\int_{-x_1}^{0} f\left(x\right)dx - \frac{1}{2}(AA')\cdot(A'\Gamma) = \int_0^{x_1} f\left(x\right)dx - \frac{1}{2}\left|-x_1 + \frac{\beta}{\lambda}\right|\left|-x_1\right| =$$

$$\int_0^{x_1} f(x)dx - \frac{1}{2}\left|x_1 - \frac{\beta}{\lambda}\right||x_1| = E_{\mu\varepsilon\iota\kappa\tau.(OBB')} - (\Delta BB') = \Omega_2$$

Θέτουμε $x = -u \Rightarrow dx = -du$. Όταν $x = 0$ τότε $u = 0$, όταν $x = -x_1$ τότε $u = x_1$ οπότε

$$-\int_{-x_1}^{0} f(x)dx = -\int_{x_1}^{0} f(u)dx = \int_0^{x_1} f(u)dx$$

Θέμα Γ

Γ1. Το πρώτο όριο της δοσμένης σχέσης, προσθαφαιρώντας τον όρο $f(x)\eta\mu x_0$, διαδοχικά γίνεται:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\eta\mu x - f(x_0)\eta\mu x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\eta\mu x - f(x_0)\eta\mu x_0 + f(x)\eta\mu x_0 - f(x)\eta\mu x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\eta\mu x - f(x)\eta\mu x_0}{x - x_0} + \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\eta\mu x_0 - f(x_0)\eta\mu x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} f(x)\frac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} + \eta\mu x_0 \lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

όμως η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in (0, \pi)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\eta\mu x - \eta\mu x_0}{x - x_0} = \sigma\upsilon\nu x_0$ οπότε

το όριο ισούται με $f(x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 + f'(x_0)\eta\mu x_0$.

Αντίστοιχα το δεύτερο όριο της αρχικής σχέσης διαδοχικά γίνεται:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o + h) + f(x_o - h) - 2f(x_o)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x_o - h) - f(x_o)}{h}$$

Στο δεύτερο όριο κάνοντας την αντικατάσταση $x_0 - h = u$ προκύπτει:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} + \lim_{u\to x_0}\frac{f(u) - f(x_o)}{x_o - u} = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Επομένως η αρχική σχέση τελικά γίνεται:

$$f(x)\sigma\upsilon\nu x + f'(x)\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow (f(x)\eta\mu x)' = 0, \text{ για κάθε } x \in (0, \pi)$$

Β΄ τρόπος:

Θέτουμε συνάρτηση $g(x) = f(x)\eta\mu x,\ x \in (0, \pi)$ άρα

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\eta\mu x - f(x_0)\eta\mu x_0}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

Το δεύτερο όριο το υπολογίζουμε ομοίως με τον α΄ τρόπο, άρα $g'(x_0)=0$ για κάθε $x_0 \in (0,\ \pi)$ άρα η g είναι σταθερή στο $(0,\ \pi)$ οπότε υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $g(x)=c \Leftrightarrow f(x)\eta\mu x=c$

Αφού η συνάρτηση $f(x)\eta\mu x$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, προκύπτει:

$$f(x)\eta\mu x=c \Leftrightarrow f(x)=\frac{c}{\eta\mu x},\ x\in(0,\ \pi)$$

όμως $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, οπότε τελικά έχουμε $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x},\ x\in(0,\ \pi)$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x\in(0,\ \pi)$ ισχύει $f'(x)=-\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$, η οποία στο $(0,\ \pi)$ μηδενίζεται για $x=\frac{\pi}{2}$ και έχει αντίθετο πρόσημο από το $\sigma\upsilon\nu x$ σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$.

Οπότε ο πίνακας μεταβολής μονοτονίας γίνεται:

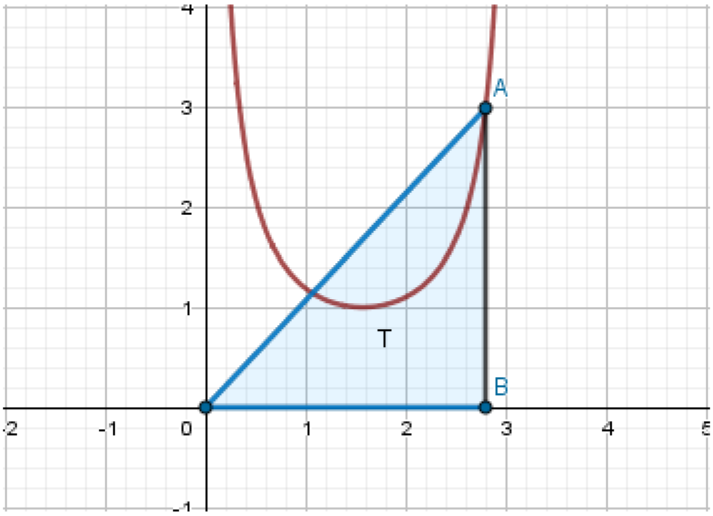
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x=0$, με $\eta\mu x>0$ όταν $x\to 0^+$.

Αντίστοιχα είναι $\lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to \pi^-}\eta\mu x=0$, με $\eta\mu x>0$ όταν $x\to \pi^-$.

Επομένως για το διάστημα $\Delta_1=\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ είναι $f(\Delta_1)=[1,\ +\infty)$ και για το $\Delta_2=\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ είναι $f(\Delta_2)=(1,\ +\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών είναι $f(A)=[1,\ +\infty)$.

Γ3. Αφού το x μεταβάλλεται με το χρόνο t, θεωρούμε τα σημεία $A\left(x(t),\dfrac{1}{\eta\mu x(t)}\right)$ και $B(x(t),0)$.



Το εμβαδό T του ορθογώνιου τριγώνου OAB δίνεται από τη σχέση:

$$T(t)=\frac{1}{2}(OB)\cdot(AB)=\frac{1}{2}x(t)\cdot\frac{1}{\eta\mu x(t)}$$

Παραγωγίζοντας ως προς t έχουμε:

$$T'(t)=\frac{1}{2}\left[x'(t)\cdot\frac{1}{\eta\mu x(t)}+x(t)\cdot\frac{-x'(t)\cdot\sigma\upsilon\nu x(t)}{\eta\mu^2 x(t)}\right]=\frac{x'(t)}{2\eta\mu x(t)}\left[1-\frac{x(t)\cdot\sigma\upsilon\nu x(t)}{\eta\mu(t)}\right]$$

Όμως $x'(t)=4cm/sec$ και για τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0)=\dfrac{3\pi}{4}$. Οπότε, για $t=t_0$ το εμβαδό του τριγώνου γίνεται:

$$T'(t_0)=\frac{x'(t_0)}{2\eta\mu x(t_0)}\left[1-\frac{x(t_0)\cdot\sigma\upsilon\nu x(t_0)}{\eta\mu(t_0)}\right]=\frac{4}{2\eta\mu\frac{3\pi}{4}}\left[1-\frac{\frac{3\pi}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4}}{\eta\mu\frac{3\pi}{4}}\right]=\frac{\sqrt{2}(4+3\pi)}{2}\quad cm^2/sec$$

Γ4. Το ολοκλήρωμα διαδοχικά γίνεται:

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2}f(x)dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{1}{\eta\mu x}dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{\eta\mu^2 x}dx=\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $\{\sigma\upsilon\nu x=u,\ -\eta\mu x dx=du\}$ με $u=\dfrac{1}{2}$ όταν $x=\dfrac{\pi}{3}$ και $u=0$ όταν $x=\dfrac{\pi}{2}$, προκύπτει:

$$\int_{1/2}^{0}\frac{-1}{1-u^2}du=\int_{0}^{1/2}\frac{1}{1-u^2}du$$

Όμως έχουμε:

$$\frac{1}{1-u^2}=\frac{A}{1+u}+\frac{B}{1-u}\Leftrightarrow 1=(A-B)u+A+B$$

Απ' όπου προκύπτει $A=B=\frac{1}{2}$. Οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_{0}^{1/2}\frac{1}{1-u^2}du=\frac{1}{2}\int_{0}^{1/2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\frac{1}{2}\left[\ln(1+u)-\ln(1-u)\right]_0^{1/2}=\frac{\ln 3}{2}$$

Θέμα Δ

Δ1. Για κάθε $x>-\ln 2$ ισχύει:

$$f'(x)-e^{-f(x)}=1\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)-e^{f(x)}e^{-f(x)}=1\cdot e^{f(x)}\Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)}f'(x)-1=e^{f(x)}\Leftrightarrow e^{f(x)}f'(x)=e^{f(x)}+1\Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}+1\right)'=\left(e^{f(x)}+1\right)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}+1,\quad x\in(-\ln 2,+\infty)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και για την οποία ισχύει ότι $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x>-\ln 2$. Επομένως θα υπάρχει σταθερά $c\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$g(x)=ce^x\Leftrightarrow e^{f(x)}+1=ce^x\ \ (1)$$

Β΄ τρόπος:

Έστω η συνάρτηση $g(x)=\frac{e^{f(x)}+1}{e^x}$, $x>-\ln 2$. Θα δείξουμε ότι η g είναι σταθερή στο διάστημα $(-\ln 2,+\infty)$. Είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$\begin{aligned}g'(x)=\frac{f'(x)e^{f(x)}e^x-e^x\left(e^{f(x)}+1\right)}{e^{2x}}&=\frac{f'(x)e^{f(x)}-e^{f(x)}-1}{e^x}\\&=\frac{\left(1+e^{-f(x)}\right)e^{f(x)}-e^{f(x)}-1}{e^x}\\&=\frac{e^{f(x)}+e^{-f(x)}e^{f(x)}-e^{f(x)}-1}{e^x}\\&=0\end{aligned}$$

άρα

$$g(x)=c\Leftrightarrow\frac{e^{f(x)}+1}{e^x}=c\Leftrightarrow e^{f(x)}+1=ce^x \text{ για κάθε } x>-\ln 2.$$

Δ2. Η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $f(0)=0$. Όμως $e^{f(x)}+1=ce^x$ για κάθε $x>-\ln 2$, άρα και για $x=0$.

Έτσι η (1) γράφεται:

$$e^{f(0)}+1=ce^0\Leftrightarrow e^0+1=c\Leftrightarrow c=2$$

άρα

$$e^{f(x)}+1=2e^x\Leftrightarrow e^{f(x)}=2e^x-1\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(2e^x-1\right) \text{ για κάθε } x\in(-\ln 2,+\infty)$$

Δ3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\ln 2,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{2e^x}{2e^x-1}>0$ για κάθε $x\in(-\ln 2,+\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>-\ln 2$.

Η $f'(x)$ είναι επίσης παραγωγίσιμη στο $(-\ln 2,+\infty)$ με:

$$f''(x)=\frac{2e^x\left(2e^x-1\right)-2e^x2e^x}{\left(2e^x-1\right)^2}=\frac{4e^{2x}-2e^x-4e^{2x}}{\left(2e^x-1\right)^2}=-\frac{2e^x}{\left(2e^x-1\right)^2}<0$$

για κάθε $x\in(-\ln 2,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\ln 2,+\infty)$.

Η εφαπτομένη της f στην αρχή των αξόνων είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=2x\Leftrightarrow y=2x$$

Εφόσον συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\ln 2,+\infty)$, η γραφική της παράσταση θα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της με εξαίρεση μόνο το σημείο επαφής. Έτσι $f(x)\le 2x$ για κάθε $x\in(-\ln 2,+\infty)$.

Δ4. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$G(x)=(x-1)\left(F(x+1)-2F(x)\right)-(x-2)\left(\int_0^1 3tf(t)dt-2x^{2018}\right),\ x\in(-\ln 2,+\infty)$$

Η συνάρτηση G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επομένως για κάθε $x\in[0,1]$ ισχύει:

$$f(x)\le 2x \Rightarrow 3xf(x)\le 6x^2 \Rightarrow \int_0^1 3xf(x)dx < \int_0^1 6x^2dx \Rightarrow \int_0^1 3xf(x)dx < \left[2x^3\right]_0^1 = 2$$

(η συνάρτηση $3xf(x)\neq 6x^2$ για κάθε $x\in[0,1]$)

άρα

$$\int_0^1 3tf(t)dt - 2 < 0$$

Επίσης

$$G(1)=(1-1)\left(F(1+1)-2F(1)\right)-(1-2)\left(\int_0^1 3tf(t)dt-2\cdot 1^{2018}\right)=\int_0^1 3tf(t)dt-2<0$$

$$G(2)=(2-1)\left(F(2+1)-2F(2)\right)-(2-2)\left(\int_0^1 3tf(t)dt-2\cdot 2^{2018}\right)=F(3)-2F(2)$$

Β΄ τρόπος:

$$\begin{aligned} F(3)-2F(2)=F(3)-F(2)-F(2)&=F(3)-F(2)+F(1)-F(2)\\ &=\left(F(3)-F(2)\right)-\left(F(2)-F(1)\right)\\ &=\left(\frac{F(3)-F(2)}{3-2}\right)-\left(\frac{F(2)-F(1)}{2-1}\right)\\ &=F'(\xi_2)-F'(\xi_1)\\ &=f(\xi_2)-f(\xi_1)>0 \end{aligned}$$

Έστω ότι $F(3)-2F(2)>0$

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,3]$ και παραγωγίσιμη στα $(1,2)$ και $(2,3)$. Επομένως εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα, θα υπάρχουν:

$$\xi_1\in(1,2): f(\xi_1)=\frac{F(2)-F(1)}{2-1}=F(2)-F(1)$$

$$\xi_2\in(2,3): f(\xi_2)=\frac{F(3)-F(2)}{3-2}=F(3)-F(2)$$

$$\text{όμως } \xi_1<\xi_2 \Rightarrow f(\xi_1)<f(\xi_2) \Rightarrow F(2)-F(1)<F(3)-F(2) \overset{F(1)=0}{\Rightarrow} 0<F(3)-2F(2)$$

Άρα η G είναι συνεχής στο $[1,2]$ με $G(1)G(2)<0$. Επομένως ισχύει το Θεώρημα Bolzano. Άρα υπάρχει $x_0 \in (1,2): G(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$$(x_0-1)\left(F(x_0+1)-2F(x_0)\right)-(x_0-2)\left(\int_0^1 3tf(t)\,dt-2x_0^{2018}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x_0-1)\left(F(x_0+1)-2F(x_0)\right)}{(x_0-1)(x_0-2)}-\frac{(x_0-2)\left(\int_0^1 3tf(t)\,dt-2x_0^{2018}\right)}{(x_0-1)(x_0-2)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(x_0+1)-2F(x_0)}{x_0-2}-\frac{\int_0^1 3tf(t)\,dt-2x_0^{2018}}{x_0-1}=0$$

άρα $\rho=1$

Δ5. Είναι:

$$\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{2-e^{-x}}dx=\int_0^{\alpha}\frac{e^x f(x)}{2e^x-1}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\frac{2e^x}{2e^x-1}f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}f'(x)f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{f^2(\alpha)-f^2(0)}{4}\overset{f(0)=0}{=}\frac{f^2(\alpha)}{4}$$

Έτσι:

$$\int_0^{\alpha}\frac{f(x)}{2-e^{-x}}dx=\frac{\ln^2 5}{4}\Leftrightarrow\frac{f^2(\alpha)}{4}=\frac{\ln^2 5}{4}\Leftrightarrow f^2(\alpha)=\ln^2 5\Leftrightarrow f(\alpha)=\pm\ln 5$$

Όμως $\alpha>0\Rightarrow f(\alpha)>f(0)\Rightarrow f(\alpha)>0$ άρα

$$f(\alpha)=\ln 5\Leftrightarrow \ln\left(2e^a-1\right)=\ln 5\Leftrightarrow 2e^a-1=5\Leftrightarrow 2e^a=6\Leftrightarrow a=\ln 3$$