Άλγεβρα Β΄ Λυκείου ΕΠΑΛ

Τράπεζα θεμάτων
Εκφωνήσεις-Λύσεις

26-1-2023

56 ασκήσεις

Δημήτριος Πατσιμάς

www.Askisopolis.gr

Αφαιρέθηκαν 41 ασκήσεις και προστέθηκαν 3 ασκήσεις.
Στην 19509 στο γ) διορθώσαμε την πρόταση που περιέχει την έκφραση << Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f να εξετάσετε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά. >> ενώ δίνεται ολόκληρη η γραφική παράσταση της συνάρτησης οπότε φαίνεται και η μονοτονία της.

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

2ο Θέμα

19503. Δίνονται οι ευθείες (ε_1): y=x+1 και (ε_2): y=x−4 .
α) Να εξετάσετε αν το σημείο Α(0,1) ανήκει και στις δύο ευθείες (ε_1) ,(ε_2). **(Μονάδες 13)**
β) Να εξετάσετε αν έχει λύση το σύστημα των εξισώσεων: $\begin{cases} x-y=-1 \\ -x+y=-4 \end{cases}$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Το σημείο Α(0,1) ανήκει σε μία ευθεία όταν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τον τύπο της.
Είναι $1=0+1 \Leftrightarrow 1=1$ οπότε ανήκει στην (ε_1) και $1=0-4 \Leftrightarrow 1=-4$ άτοπο άρα δεν ανήκει στην (ε_2)

β) Έχουμε $\begin{cases} x-y=-1 \\ -x+y=-4 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 0x+0y=3$ οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

20381. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x+3y=-1 \end{cases}$.
α) Το ζεύγος (x, y) = (0,3) είναι λύση του συστήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 12)**
β) Να λύσετε το σύστημα. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Αν αντικαταστήσουμε το ζεύγος (0,3) σε οποιαδήποτε από τις δύο γραμμικές εξισώσεις δεν τις επαληθεύει (π.χ. στην πρώτη $3\cdot 0-3=5 \Leftrightarrow -3=5$ άτοπο) άρα δεν είναι λύση του συστήματος.

β) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x+3y=-1 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 3 \\ \\ \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-3y=15 \\ -2x+3y=-1 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 7x=14$ οπότε $x=2$ και $3\cdot 2-y=5 \Leftrightarrow y=1$.

20329.α) Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2x+7y=-5 \\ 3x-y=4 \end{cases}$ **(Μονάδες 15)**
β) Ποιο είναι το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ); Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\begin{cases} 2x+7y=-5 \\ 3x-y=4 \end{cases} \begin{vmatrix} \\ \cdot 7 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+7y=-5 \\ 21x-7y=28 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 23x=23$ οπότε $x=1$ και $3\cdot 1-y=4 \Leftrightarrow y=-1$.

β) Το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) είναι η λύση του συστήματος $(1,-1)$

20291.Θεωρούμε τις ευθείες ε_1 : 3x −4y=2 και ε_2 : 5x +4y= 14 .
α) Να εξετάσετε αν το σημείο (6, 4) είναι κοινό σημείο των ευθειών. **(Μονάδες 10)**
β) Να βρείτε το σημείο τομής των δυο ευθειών λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ 5x+4y=14 \end{cases}$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Το σημείο Α(6,4) ανήκει σε μία ευθεία όταν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τον τύπο της.
Είναι $3\cdot 6-4\cdot 4=2 \Leftrightarrow 18-16=2 \Leftrightarrow 2=2$ οπότε ανήκει στην (ε_1) και
$5\cdot 6+4\cdot 4=14 \Leftrightarrow 30+16=14 \Leftrightarrow 46=14$ άτοπο άρα δεν ανήκει στην (ε_2)

β) $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ 5x+4y=14 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 8x=16$ οπότε $x=2$ και $3\cdot 2-4\cdot y=2 \Leftrightarrow 4y=4 \Leftrightarrow y=1$. Το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) είναι η λύση του συστήματος $(2,1)$.

20266.Δίνεται το γραμμικό σύστημα $\begin{cases} \boldsymbol{3x+2y=8} \\ \boldsymbol{2x-y=3} \end{cases}$ **.**

α) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα. (Μονάδες 15)
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών $(\varepsilon_1): 3x+2y=8$ **και** $(\varepsilon_2): 2x-y=3$**. (Μονάδες 10)**

Λύση

α) $\begin{cases} 3x+2y=8 \\ 2x-y=3 \end{cases} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=8 \\ 4x-2y=6 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 7x=14$ οπότε $x=2$ και $3\cdot 2+2y=8 \Leftrightarrow 2y=2 \Leftrightarrow y=1$.

β) Το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ) είναι η λύση του συστήματος $(2,1)$.

4ο Θέμα

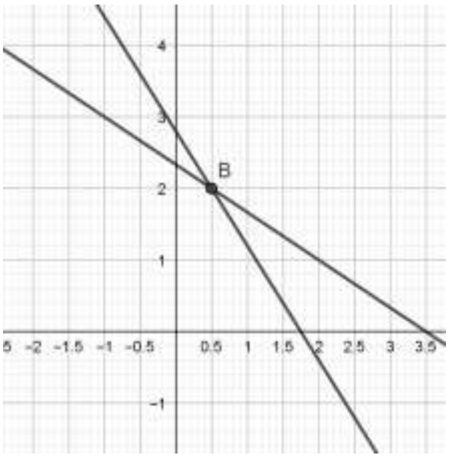
20437.Ένα μικρό κατάστημα σε μια γειτονιά πουλάει, μεταξύ άλλων αγαθών, γάλα και ψωμί. Την Τρίτη το πρωί μέσα σε μια ώρα πούλησε 8 φρατζόλες ψωμί και 5 λίτρα γάλα και εισέπραξε 14 ευρώ. Την Πέμπτη το πρωί την ίδια ώρα πούλησε 6 φρατζόλες ψωμί και 9 λίτρα γάλα και εισέπραξε 21 ευρώ. Αν x είναι η τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και y η τιμή πώλησης του ενός λίτρου γάλακτος,
α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε την τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και του ενός λίτρου γάλακτος. (Μονάδες 7)
γ) i. Να παραστήσετε γραφικά το σύστημα του α) ερωτήματος και να ονομάσετε Β το σημείο τομής των δυο ευθειών. (Μονάδες 6)
ii. Αν το σημείο τομής των ευθειών είναι $B\left(\frac{1}{2},2\right)$ **να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)**

Λύση

α) Το ζητούμενο σύστημα είναι : $\begin{cases} 8x+5y=14 \\ 6x+9y=21 \end{cases}$.

β) Είναι : $\begin{cases} 8x+5y=14 \\ 6x+9y=21 \end{cases} \begin{cases} 8x+5y=14 \\ 6x+9y=21 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot(-4) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x+15y=42 \\ -24x-36y=-84 \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} -21y=-42$ οπότε $y=2$ και
$8\cdot x+5\cdot 2=14 \Leftrightarrow 8x=4 \Leftrightarrow x=0,5$.
Άρα η τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού είναι 0,5 ευρώ και του ενός λίτρου γάλακτος 2 ευρώ.

γ) i)

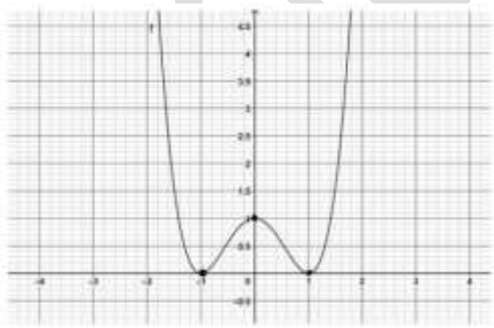


ii) Το σημείο τομής των δυο ευθειών είναι το $B(0.5, 2)$, η τετμημένη του οποίου εκφράζει την τιμή πώλησης (σε ευρώ) της μίας φρατζόλας ψωμιού (μία φρατζόλα ψωμί πωλείται μισό ευρώ) και η τεταγμένη του $y = 2$ εκφράζει την τιμή πώλησης (σε ευρώ) του ενός λίτρου γάλακτος (το ένα λίτρο γάλα πωλείται 2 ευρώ).

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2ο Θέμα

20435. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράστασης μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



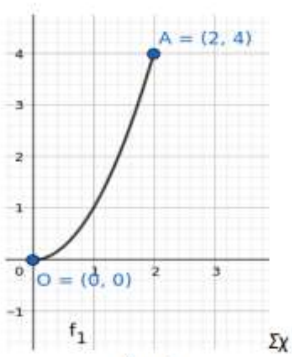
α) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 13)
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις που την αποκτά. (Μονάδες 12)

Λύση

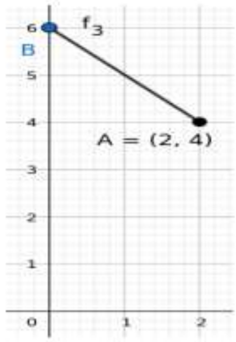
α) Η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y άρα είναι άρτια.

β) Η f έχει ελάχιστη τιμή το 0 ,την οποία παρουσιάζει στο -1 και στο 1.

19504.Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1 , f_3 .



ήμα 1



Σχήμα 2

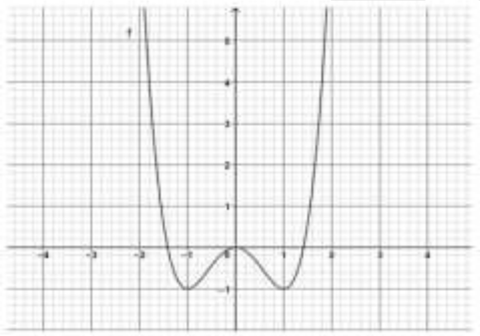
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των f_1 ,f_3 , εφόσον υπάρχουν. (Μονάδες 12)
β) Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων f_1 ,f_3 . (Μονάδες 13)

Λύση

α) Η f_1 έχει ελάχιστη τιμή το 0 και μέγιστη το 4 .
Η f_3 έχει ελάχιστη τιμή το 4 και μέγιστη το 6 τις οποίες παρουσιάζει στα 2,0 αντίστοιχα.

β) Η f_1 είναι γνησίως αύξουσα στο [0,2] και η f_3 είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,2]

20434.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράστασης μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το ℝ.



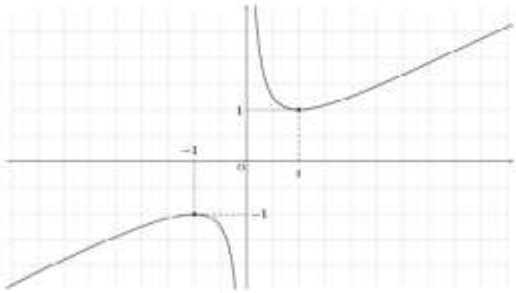
α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις που την αποκτά. (Μονάδες 12)

Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[-1,0\right],\left[1,+\infty\right)$

β) Η f έχει ελάχιστη τιμή το -1 την οποία παρουσιάζει στα -1,1.

20328.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης y= f (x) με $x \neq 0$. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



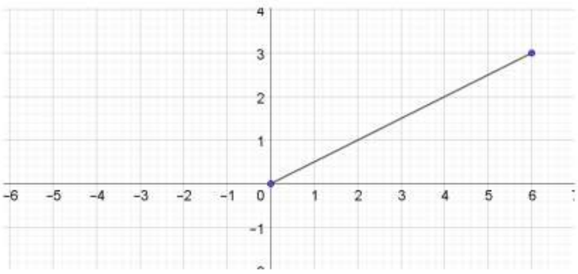
α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f . **(Μονάδες 15)**
β) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός «η συνάρτηση f είναι περιττή». Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1],[1,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0),(0,1]$

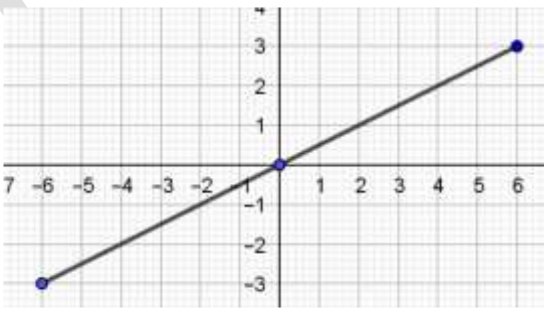
β) Ο ισχυρισμός είναι αληθής αφού η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, οπότε η συνάρτηση f είναι περιττή.

20268.Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [– 6,6] είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (4, 2) . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0,6].
α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. **(Μονάδες 13)**
β) Να βρείτε το f (–4) . **(Μονάδες 12)**



Λύση

α) Η f είναι περιττή άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση.

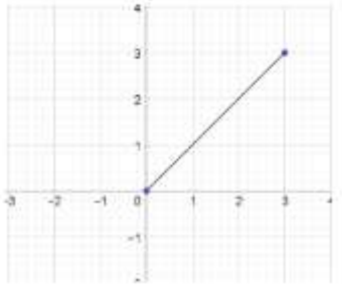


β) $f(-4)=-f(4)=-2$ είτε από τον τύπο είτε γραφικά.

20267.Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα [–3,3] είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο (2, 2) . Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0,3].

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το f (– 2). (Μονάδες 12)

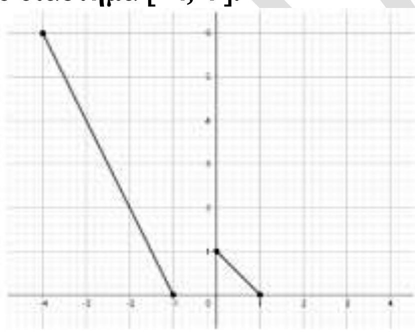


Λύση

α) Η f είναι άρτια άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση.

β) $f(-2)=f(2)=2$ είτε από τον τύπο είτε γραφικά.

19026.Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα [–4, 4].

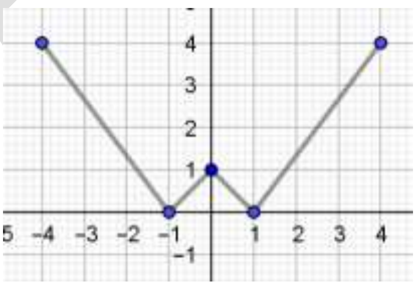


α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f . (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

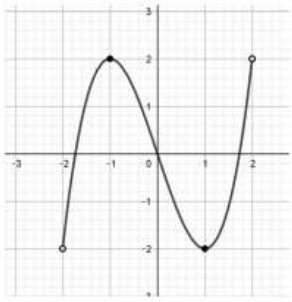
Λύση

α) Η f είναι άρτια άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση.



β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[-1,1],[1,4]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-4,-1],[0,1]$

19024.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράστασης μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα (–2, 2).



α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 13)
β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών. (Μονάδες 12)

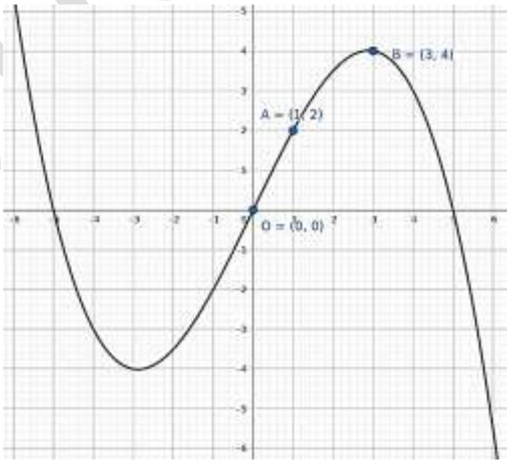
Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left[-2,-1\right],\left[1,2\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-1,1\right]$

β) Η f έχει ελάχιστη τιμή το -2 , την οποία παρουσιάζει στα -2,1 και μέγιστη το 2 την οποία παρουσιάζει στα -1,2.

4ο Θέμα

19509.Δίνονται τα σημεία $O(0,0),A(1,2),B(3,4)$ τα οποία ανήκουν στη γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης f, με πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες δύο ακόμα σημείων Γ και Δ, τα οποία να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)
β) Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 8)
γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f να εξετάσετε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά. (Μονάδες 9)



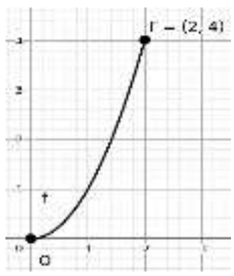
Λύση

α) Η συνάρτηση είναι περιττή άρα στη γραφική παράσταση της f βρίσκονται τα συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων των σημείων Α και Β, τα οποία είναι αντίστοιχα τα σημεία Γ(-1,-2) και Δ(-3,-4) .

β) Η f είναι γνησίως μονότονη ,$1<3$ και $f(1)=2<f(3)=4$ άρα h φ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[-3,3\right]$ και γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-3\right],\left[3,+\infty\right)$

19505.Δίνεται ένα τμήμα (μέρος) της γραφικής παράστασης καθεμίας από τις συναρτήσεις f, g σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων .
α) Σε καθένα από τα δύο σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση για όλους τους αριθμούς $x>0$ για τους οποίους ορίζεται καθεμία από τις συναρτήσεις αυτές. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και η g άρτια, να βρείτε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων. (Μονάδες 7)



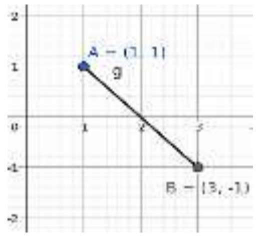
β) Να συμπληρώσετε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε όλο το πεδίο ορισμού της, αν αυτή είναι περιττή.

(Μονάδες 7)

γ) Να συμπληρώσετε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε όλο το πεδίο ορισμού της, αν αυτή είναι άρτια.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας των δύο συναρτήσεων f, g όπως αυτές προέκυψαν από τα ερωτήματα β και γ.



(Μονάδες 5)

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι περιττή άρα έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων .

Στο πεδίο ορισμού της f ανήκουν τα σημεία με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[0,2]$ άρα θα ανήκουν και τα συμμετρικά τους ως προς την αρχή των αξόνων δηλαδή τα σημεία με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[-2,0]$.

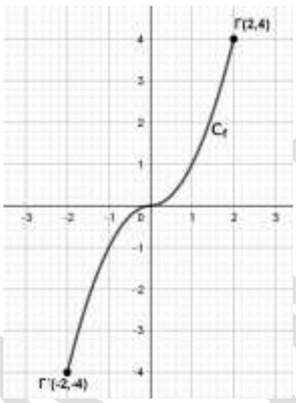
Επομένως η f έχει πεδίο ορισμού $A_f = [-2,2]$.

Η συνάρτηση g είναι άρτια άρα έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y .

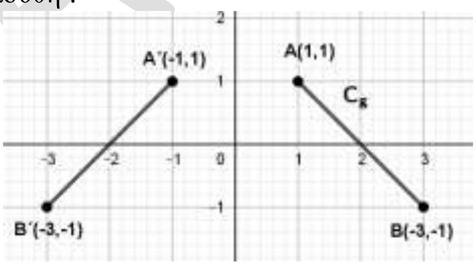
Στο πεδίο ορισμού της f ανήκουν τα σημεία με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[1,3]$ άρα θα ανήκουν και τα συμμετρικά τους ως προς τον άξονα y΄y δηλαδή τα σημεία με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $[-3,-1]$.

Επομένως η g έχει πεδίο ορισμού $A_g = [-3,-1] \cup [1,3]$.

β) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων οπότε η γραφική της παράσταση σε ολο το πεδίο ορισμού της είναι η ακόλουθη :



γ) Η C_g έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y οπότε η γραφική της παράσταση σε ολο το πεδίο ορισμού της είναι η ακόλουθη :



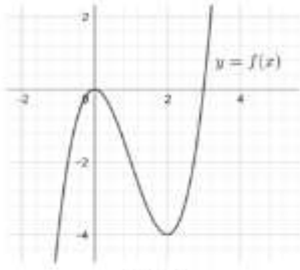
δ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,2]$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,3]$.

ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

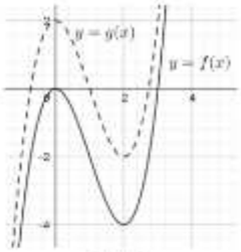
2ο Θέμα

20968.Στο σχήμα 1, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2$ με $x \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 1

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 14)
β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g του σχήματος 2, η οποία προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της f. (Μονάδες 11)



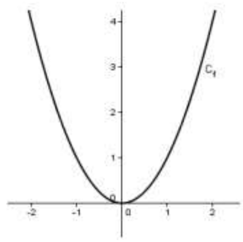
Σχήμα 2

Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0], [2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$

β) Η g έχει προκύψει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 2 μονάδες προς τα πάνω άρα έχει τον τύπο $g(x) = f(x) + 2 = x^3 - 3x^2 + 2$

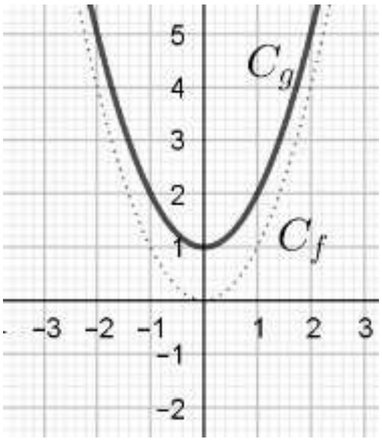
20286.Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 12)
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = x^2 + 1$ (Μονάδες 13)



Λύση

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

β) Η φ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα προς τα πάνω οπότε έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ

2ο Θέμα

21118. Μία γωνία ω είναι ίση με 2 ακτίνια.
α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου. **(Μονάδες 13)**
β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Είναι : $\frac{\pi}{2} < 2 < \pi$ (π ≈3,14) οπότε η γωνία ω είναι αμβλεία και βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

β) Από τον γνωστό τύπο έχουμε $\frac{2}{\pi} = \frac{\omega}{180} \Leftrightarrow \omega = \frac{360}{\pi}$ μοίρες.

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2ο Θέμα

20397. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$.
α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

x	**0**	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)					

(Μονάδες 10)

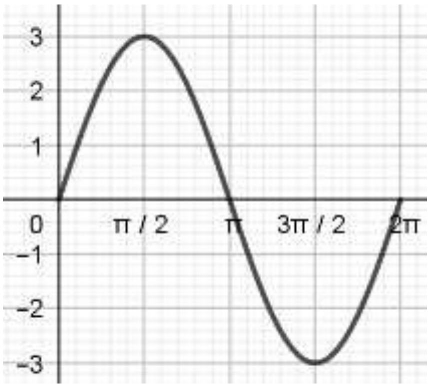
β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο διάστημα [0, 2π]. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α)

x	**0**	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
f(x)	0	3	0	-3	0

β)



ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

2ο Θέμα

20723.Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2$ και $Q(x) = -2x^2(x-2) + 2$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; **(Μονάδες 5)**

β) Τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(Μονάδες 12)**

γ) Να βρείτε τη τιμή του πολυωνύμου $Q(x)$ για $x = 1$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Είναι 3ου βαθμού (βαθμός μεγιστοβάθμιου όρου)

β) Είναι $Q(x) = -2x^2(x-2) + 2 = -2x^3 + 4x^2 + 2 = P(x)$.

19025.Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = ax^2 + 7, a \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 4x^2 + 7$. **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9 = \cancel{-2x^3} + 4x^2 + \cancel{2x^3} - 2 + 9 = 4x^2 + 7$

β) Για να είναι ίσα πρέπει να είναι ίδιου βαθμού και οι αντίστοιχοι συντελεστές να είναι ίσοι οπότε $\alpha = 4$.

.

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

2ο Θέμα

20428.Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ και δ(x) = x + 1.

α) Να κάνετε τη διαίρεση P(x): δ(x). **(Μονάδες 15)**

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 10)

Λύση

α)

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^3 + 2x^2 + x + 1 & x - 1 \\
\hline
+\ -x^3 - x^2 & x^2 + x \\
\hline
\qquad x^2 + x + 1 & \\
+\quad -x^2 - x & \\
\hline
\qquad\quad 1 &
\end{array}
$$

β) Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του α) ερωτήματος είναι:.

$P(x) = (x+1)(x^2 + x) + 1$ (πηλίκο $x^2 + x$ και υπόλοιπο 1).

20382.Η διαίρεση ενός πολυωνύμου P(x) με το x–3 έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το x–3 και να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$. **(Μονάδες 13)**

β) Είναι το x = 3 ρίζα του πολυωνύμου P(x) ; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το x-3 είναι :
$P(x)=(x-3)(x^2+2)+4$ οπότε $P(x)=x^3+2x-3x^2-6+4 \Leftrightarrow P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

β) Για να είναι ρίζα του πολυωνύμου πρέπει $P(3)=0$.
Όμως $P(3)=3^3-3\cdot 3^2+2\cdot 3-2=27-27+6-2=4\neq 0$ οπότε το 3 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

20966.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 4x - 27$.
α) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-8)$ είναι $υ = 5$. **(Μονάδες 15)**
β) Να υπολογίσετε το $P(8)$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Πρέπει $P(8)=5 \Leftrightarrow 2\cdot 8^3-16\cdot 8^2+4\cdot 8-27=5 \Leftrightarrow 1024-1024+32-27=5 \Leftrightarrow 5=5$ ισχύει άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-8)$ είναι $υ = 5$.

β) Από το α) $P(8)=5$.

20556.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.
α) Να υπολογίσετε την τιμή P(1) . **(Μονάδες 13)**
β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x −1. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Είναι $P(1)=0-0+5-3-2=0$

β) Από το α) το 1 ρίζα του πολυωνύμου άρα το x-1 παράγοντας του.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2ο Θέμα

21317.Δίνεται η εξίσωση $8x^4-9x+1$.
α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1. **(Μονάδες 12)**
β) Να αποδείξετε ότι δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα. **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) Είναι $P(1)=8\cdot 1^4-9\cdot 1+1=8-9+1=0$ άρα το 1 ρίζα του πολυωνύμου.

β) Οι ακέραιες ρίζες του πολυωνύμου είναι οι διαιρέτες του 1 δηλαδή το 1 και το -1.
Όμως $P(-1)=8\cdot(-1)^4-9\cdot(-1)+1=8+9+1=18\neq 0$ οπότε δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα.

21315.Έστω P(x) πολυώνυμο το οποίο έχει παράγοντα το x −1 . Αν η διαίρεση P(x): (x −1) δίνει πηλίκο x^2+1 , τότε:
α) Να αιτιολογήσετε γιατί $P(x)=(x-1)(x^2+1)$. **(Μονάδες 13)**
β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq 0$. **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) Το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x-1 άρα η διαίρεση P(x): (x −1) είναι τέλεια οπότε $P(x)=(x-1)(x^2+1)$.

β) Είναι $P(x)\le 0 \Leftrightarrow (x-1)\underbrace{(x^2+1)}_{>0}\le 0 \Leftrightarrow x-1\le 0 \Leftrightarrow x\le 1$.

15619.α) Να αποδείξετε ότι: $2x^3+x^2-x=x(2x^2+x-1)$. **(Μονάδες 10)**

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x^3+x^2-x=0$. **(Μονάδες 15)**

Λύση

α) Είναι $2x^3+x^2-x=x(2x^2+x-1)$ (βγάζουμε κοινό παράγοντα το x).

β) Είναι $2x^3+x^2-x=0 \Leftrightarrow x(2x^2+x-1)=0 \Leftrightarrow (x=0)$ ή $\left(2x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \left(x=-1 \text{ ή } x=\frac{1}{2}\right)\right)$.

($\Delta=9, x_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases}-1\\ \frac{1}{2}\end{cases}$).

4ο Θέμα

21320.Έστω P(x) ένα πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρείται με το x^2+x+2 δίνει πηλίκο x–2 και υπόλοιπο − 2x+ 4 .

α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x^2+x+2)$. **(Μονάδες 8)**

β) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3-x^2-2x$. **(Μονάδες 7)**

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x}<0$. **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το x^2+x+2 είναι :
$P(x)=(x^2+x+2)(x-2)-2x+4$.

β) Είναι $P(x)=(x^2+x+2)(x-2)-2x+4=x^3-2x^2+x^2-\cancel{2x}+\cancel{2x}-\cancel{4}-2x+\cancel{4} \Leftrightarrow$
$P(x)=x^3-x^2-2x.$

γ) Είναι $\frac{x^3-x^2-2x}{x}<0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}(x^2-x-2)}{\cancel{x}}<0 \Leftrightarrow x^2-x-2<0 \leftrightarrow -1<x<2.$

Όμως $x\ne 0$ οπότε $x\in(-1,0)\cup(0,2)$.

20665. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να βρείτε τις τιμές του πολυωνύμου $P(0)$ και $P(-1)$. **(Μονάδες 5)**

β) Ποιος από τους αριθμούς 0 και −1 είναι ρίζα του πολυωνύμου; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **(Μονάδες 6)**

γ) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$. **(Μονάδες 6)**

δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Είναι $P(0)=-1$ και $P(-1)=(-1)^3+(-1)^2-(-1)-1=-1+1+1-1=0$.

β) Από το α) ερώτημα το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου αφού $P(-1)=0$.

γ) Είναι $P(x)=x^3+x^2-x-1=x^2(x+1)-(x+1)=(x+1)(x^2-1)$ οπότε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι το x^2-1

δ) Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)=0 \Leftrightarrow$
$\left((x+1)^2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1\right)$ ή $(x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$

20340.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-4x-4$.
α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το x +1 . **(Μονάδες 8)**
β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, ή με όποιο άλλο τρόπο μπορείτε, να αποδείξετε ότι $P(x)=(x+1)(x+2)(x-2)$ **(Μονάδες 8)**
γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq 0$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Είναι $P(-1)=(-1)^3+(-1)^2-4(-1)-4=-1+1+4-4=0$ οπότε το -1 ρίζα του πυλυωνύμου P(x) άρα το $x+1$ παράγοντας του..

β) $P(x)=x^3+x^2-4x-4=x^2(x+1)-4(x+1)=(x+1)(x^2-4) \Leftrightarrow P(x)=(x+1)(x-2)(x+2)$..

γ)

x	$-\infty$	-2		1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
P(x)	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\infty,-2]\cup[1,2]$

21324.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-\alpha x^2-(\beta+2)x+6$ και το τριώνυμο x^2-x-6 .
α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. **(Μονάδες 6)**
β) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα κάθε παράγοντα του τριωνύμου, τότε:
i. να αιτιολογήσετε γιατί P(3) =P(−2) = 0 . **(Μονάδες 5)**
ii. να αποδείξετε ότι α =2 και β= 3 . **(Μονάδες 8)**
γ) Να λύσετε την εξίσωση P(x) =0 . **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Το τριώνυμο έχει ρίζες το -2 και το 3 άρα παραγοντοποιείται : $x^2+x-6=(x+2)(x-3)$.

β) i. Αφού έχει παράγοντες τους $x+2, x-3$ το -2 και το 3 είναι ρίζες του άρα $P(3)=P(-2)=0$.

ii. Είναι $P(-2)=0 \Leftrightarrow -8-4\alpha+2(\beta+2)+6=0 \Leftrightarrow -2-4\alpha+2\beta+4=0 \Leftrightarrow 4\alpha-2\beta=2 \Leftrightarrow$
$2\alpha-\beta=1$ (1),
$P(3)=0 \Leftrightarrow 27-9\alpha-3(\beta+2)+6=0 \Leftrightarrow 33-9\alpha-3\beta-6=0 \Leftrightarrow 9\alpha+3\beta=27 \Leftrightarrow 3\alpha+\beta=9$ (2).
Με πρόσθεση των σχέσεων (1) και (2) έχουμε $5\alpha=10 \Leftrightarrow \alpha=2$ οπότε $4-\beta=1 \Leftrightarrow \beta=3$.

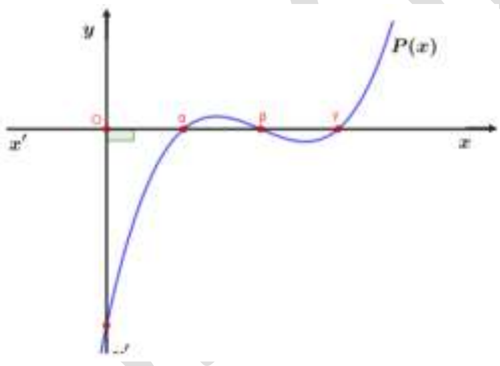
γ) Για α=2 και β=3 έχουμε $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

1	-2	-5	6	-2
	-2	8	-6	
1	-4	3	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x)=(x+2)(x^2-4x+3)$.

Το τριώνυμο x^2-4x+3 έχει ρίζες το 1 και το 3 οπότε το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζες τους -2, 1,3.

20709.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)=x^3-6x^2+11x-6, x \in R$ και έστω α, β, γ οι τετμημένες των σημείων στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα $x'x$.
α) Να αποδείξετε ότι $P(3)=0$. **(Μονάδες 5)**
β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$. **(Μονάδες 9)**
γ) Να βρείτε, με αιτιολόγηση, τα α, β, γ. **(Μονάδες 6)**
δ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. **(Μονάδες 5)**



Λύση

α) Είναι $P(3)=3^3-6\cdot3^2+11\cdot3-6=27-54+33-6=0$.

β)

1	-6	11	-6	3
	3	-9	-6	
1	-3	2	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x)=(x-3)(x^2-3x+2)$.

Το τριώνυμο x^2-3x+2 έχει ρίζες το 1 και το 2 οπότε το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζες τους 1,2 και 3.

γ) Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία με τετμημένη α,β,γ άρα τα α,β,γ είναι ρίζες της οπότε $\alpha=1, \beta=2, \gamma=3$ αφού $\alpha<\beta<\gamma$.

δ) Από τη γραφική παράσταση της P έχουμε οι λύσεις της ανίσωσης $P(x) < 0$ είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\infty,1)\cup(2,3)$.

20323.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το x−2 είναι παράγοντας του πολυωνύμου. **(Μονάδες 8)**
β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) =0 . **(Μονάδες 8)**
γ) Να λύσετε την ανίσωση $(x-2)(x^2-2x-3) > 0$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Είναι $P(2) = 2^3 - 4\cdot 2^2 + 2 + 6 = 8 - 16 + 8 = 0$.

β)

1	-4	1	6	2
	2	-4	-6	
1	-2	-3	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x) = (x-2)(x^2-2x-3)$.

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 3$ έχει ρίζες το -1 και το 3 οπότε το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζες τους -1,2 και 3.

γ)

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
$x-2$	−		−	0	+		+
x^2-2x-3	+	0	−		−	0	+
$P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$	−	0	+	0	−	0	+

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων $(-1,2)\cup(3,+\infty)$.

20433.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1. **(Μονάδες 7)**
β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. **(Μονάδες 9)**
γ) Αν $P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Είναι $P(1) = 1^3 - 1\cdot 1^2 - 1 + 2 = 1 - 1 - 1 + 2 = 0$ οπότε το 1 ρίζα του πολυωνύμου P(x).

β)

1	-2	-1	2	1
	1	-1	-2	
1	-1	-2	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x) = (x-1)(x^2-x-2)$.

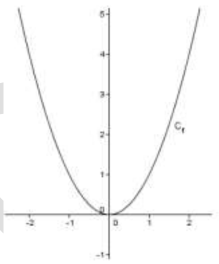
Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει ρίζες το -2 και το 1 οπότε το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζες τους -1,1 και 2.

γ)

x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων $(-1,1)\cup(2,+\infty)$.

20350.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=x^2, x\in\mathbb{R}$.



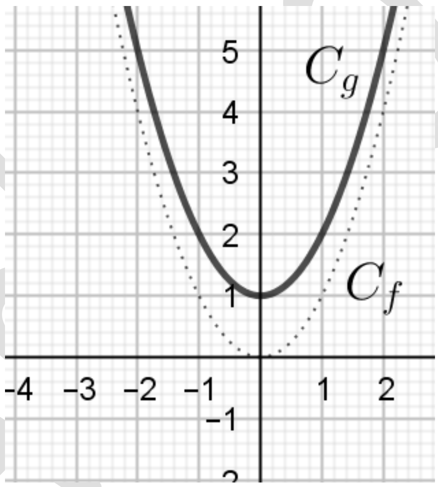
α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση Cg της συνάρτησης $g(x)=x^2+1, x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 8)**

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της g(x). **(Μονάδες 8)**

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της Cg με τη γραφική παράσταση της $h(x)=x^3+x, x\in\mathbb{R}$. **(Μονάδες 9)**

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση 1 προς τα πάνω οπότε είναι η ακόλουθη:



β) Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.
Έχει ελάχιστη τιμή το 1.

γ) Είναι $g(x)=h(x)\Leftrightarrow x^2+1=x^3+x\Leftrightarrow x^3-x^2+x-1=0\Leftrightarrow$

$$x^2(x-1)+(x-1)=0\Leftrightarrow(x-1)\left(\underbrace{x^2+1}_{\neq 0}\right)=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow x=1.$$

20346.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-6x^2+11x-a, a\in\mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1 , τότε:

α) Να αποδείξτε ότι α = 6. **(Μονάδες 8)**

β) Να κάνετε τη διαίρεση P(x):(x −1) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. **(Μονάδες 9)**

γ) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 . **(Μονάδες 8)**

Λύση

α) Το 1ρίζα του πολυωνύμου P(x) οπότε $P(1)=0 \Leftrightarrow 1-6+11-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=6$.

β)

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \hline
+ & -x^3+x^2 & x^2-5x+6 \\ \cline{2-2}
+ & -5x^2+11x-6 & \\
 & 5x^2-5x & \\ \cline{2-2}
 & 6x-6 & \\
 & -6x+6 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$.

γ) Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow (x-1=0 \Leftrightarrow x=1)$ ή $(x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2,3)$.

20271.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-x^2-\lambda x+2, \lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου το υπόλοιπο της διαίρεσης με το x–1 είναι 3.

α) να βρείτε την τιμή του λ . **(Μονάδες 7)**

β) για λ =1

i. να κάνετε τη διαίρεση P(x): (x– 1) και να αποδείξετε ότι $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$. **(Μονάδες 8)**

ii. να λύσετε την ανίσωση P(x)< 3 . **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x-1$ είναι 3 οπότε $P(1)=3 \Leftrightarrow 3-1-\lambda+2=3 \Leftrightarrow \lambda=1$

β) i. Για λ =1 είναι $P(x)=3x^3-x^2-x+2$.

$$\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3-x^2-x+2 & x-1 \\ \hline
+ & -3x^3+3x^2 & 3x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
+ & 2x^2-x+2 & \\
 & -2x^2+2x & \\ \cline{2-2}
 & x+2 & \\
 & -x+1 & \\ \cline{2-2}
 & \mathbf{3} &
\end{array}$$

Άρα από την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης είναι $P(x)=(x-1)(3x^2+2x+1)+3$.

γ) Είναι $P(x)<3 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+1)+3<3 \Leftrightarrow (x-1)\left(\underbrace{3x^2+2x+1}_{\substack{>0 \\ \text{αφού } \Delta=-8<0}}\right)<0 \Leftrightarrow x-1<0 \Leftrightarrow x<1$.

20270.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-3x^3+x^2+\lambda x-2, \lambda\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το x+1.

α) Να βρείτε την τιμή του λ . **(Μονάδες 8)**

β) Για λ = 3 :

i. να αποδείξετε ότι το P(x) έχει παράγοντα και το x −2 και ότι $P(x)=(x-2)(x+1)(x-1)^2$.

(Μονάδες 10)

ii. να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 . **(Μονάδες 7)**

Λύση

α) Το $x+1$ παράγοντας του του πολυωνύμου P(x) οπότε το -1 ρίζα του πολυωνύμου P(x) άρα $P(-1)=0 \Leftrightarrow 1+3+1-\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=3$.

β) Για λ =3 είναι $P(x)=x^4-3x^3+x^2+3x-2$.

Είναι $P(2)=16-3\cdot 8+4+6-2=16-24+8=0$ οπότε το 2 ρίζα του πολυωνύμου P(x) άρα το $x-2$ παράγοντας του του πολυωνύμου.

1	-3	1	3	-2	2
	2	-2	-2	2	
1	-1	-1	1	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x)=(x-2)(x^3-x^2-x+1)=(x-2)\left[x^2(x-1)-(x-1)\right]\Leftrightarrow$

$P(x)=(x-2)(x^2-1)(x-1)=(x-2)(x+1)(x-1)(x-1)\Leftrightarrow P(x)=(x-2)(x+1)(x-1)^2$.

γ) Είναι $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow ....x=-1,1,2$.

20269.Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x+a, a\in\mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε την τιμή του α . **(Μονάδες 5)**

β) Για α = 2 :

i. να κάνετε τη διαίρεση P(x): (x −1) και να δείξετε ότι $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$. (Μονάδες 10)

ii. να λύσετε την ανίσωση P(x)< 0 . **(Μονάδες 10)**

Λύση

α) Το 1 ρίζα του πολυωνύμου P(x) άρα $P(1)=0 \Leftrightarrow 1-3+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=2$.

β) Για $\alpha=2$: $P(x)=x^3-3x+2$.

1	0	-3	2	1
	1	1	- 2	
1	1	-2	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x)=(x-1)(x^2+x-2)$.

γ) Το τριώνυμο x^2+x-2 έχει ρίζες το1 και το -2.

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x-1$		−		−	0	+	
x^2+x-2		+	0	−		+	

$P(x)=(x-2)(x^2-2x-3)$	$-$	$+$	$+$

Από τον παραπάνω πίνακα προσήμων οι λύσεις της ζητούμενης ανίσωσης είναι η ένωση το διάστημα $(-\infty,2)$.

21090. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(2-\alpha)x^3-3x^2+4x-2$ και $Q(x)=x^3-3x^2+(\alpha^2+3)x-2$
α) Να βρείτε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα. (Μονάδες 09)
β) Για $\alpha=1$ να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 08)
γ) Για $\alpha=1$ να εξετάσετε αν το $x+1$ είναι παράγοντας του $Q(x)$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 08)

Λύση

α) Για να είναι ίσα τα πολυώνυμα πρέπει : $\begin{cases}2-\alpha=1\\ \alpha^2+3=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha=\pm1\end{cases}$ άρα $\alpha=1$.

β) Για $\alpha=1$ είναι $P(x)=x^3-3x^2+4x-2$.

1	-3	4	- 2	1
	1	-2	2	
1	-2	2	0	

Από το σχήμα Horner έχουμε $P(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$.

Είναι $P(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x^2-2x+2)=0\Leftrightarrow(x-1=0\Leftrightarrow x=1)$ ή

($x^2-2x+2=0$ αδύνατη αφού $\Delta=-4<0$)

γ) Για $\alpha=-1$ είναι $Q(x)=x^3-3x^2+4x-2$.

Είναι $Q(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+4(-1)-2=-1-3-4-2=-10\neq0$ άρα το -1 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου οπότε το $x+1$δεν είναι παράγοντας του Q(x).

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

2ο Θέμα

21313.Δίνεται η εξίσωση $\sqrt{x}=x$ (1) .
α) Να βρείτε για ποιους αριθμούς x ∈ℝ ορίζεται η εξίσωση (1). (Μονάδες 12)
β) Να λύσετε την εξίσωση (1). (Μονάδες 13)

Λύση

α) Πρέπει $x\geq0$.
Άρα η εξίσωση (1) ορίζεται για $x\geq0$.

β) $\sqrt{x}=x\Leftrightarrow\sqrt{x}^2=x^2\Leftrightarrow x=x^2\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow x(x-1)=0\Leftrightarrow$

$(x=0 \text{ δεκτή})$ ή $(x-1=0\Leftrightarrow x=1 \text{ δεκτή})$.

21312.Δίνεται η εξίσωση $\dfrac{x^3}{x-1}-\dfrac{2}{x^2+1}=\dfrac{2}{\left(x^2+1\right)\left(x-1\right)}$ **(1)** .

α) Να βρείτε για ποιους αριθμούς x ∈ℝ ορίζεται η εξίσωση (1). **(Μονάδες 12)**
β) Να εξετάσετε ποιος από τους αριθμούς 1 και 0 είναι ρίζα της εξίσωσης (1). **(Μονάδες 13)**

Λύση

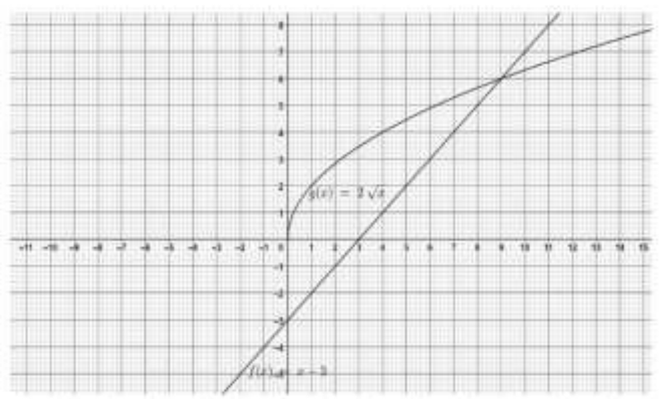
α) Πρέπει $\left(x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1\right)$ και $\left(x^2+1\neq 0 \text{ ισχύει}\right)$.
Άρα η εξίσωση (1) ορίζεται για $x\neq 1$.

β) Η εξίσωση (1) δεν ορίζεται για $x=1$ άρα το 1 δεν μπορεί να είναι ρίζα της.
Αν αντικαταστήσουμε στην (1) όπου x το 0 έχουμε :
$\dfrac{0}{0-1}-\dfrac{2}{0+1}=\dfrac{2}{\left(0+1\right)\left(0-1\right)}\Leftrightarrow -2=-2$ ισχύει οπότε το 0 είναι ρίζα της (1) .

4ο Θέμα

20446.Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεις $f\left(x\right)=x-3$**, με** $x\in\mathbb{R}$ **και** $g\left(x\right)=2\sqrt{x}$ **.**

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g. **(Μονάδες 5)**
β) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση $f\left(x\right)=g\left(x\right)$**.** **(Μονάδες 10)**
γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $g\left(x\right)<f\left(x\right)$**.** **(Μονάδες 10)**



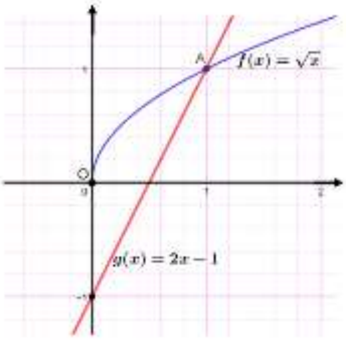
Λύση

α) Πρέπει $x\geq 0$.
Άρα $A_g=\left[0,+\infty\right)$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $\left(x\geq 0\right)$ και $\left(x-3\geq 0\Leftrightarrow x\geq 3\right)$.
άρα ορίζεται για $x\geq 3$.
$f\left(x\right)=g\left(x\right)\Leftrightarrow x-3=2\sqrt{x}\Leftrightarrow\left(x-3\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2\Leftrightarrow$.
$x^2-6x+9=4x\Leftrightarrow x^2-10x+9=0\Leftrightarrow\left(x=1 \text{ απορρίπτεται}\right)$ ή $\left(x=10 \text{ δεκτή}\right)$.

γ) Η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $\left(9,+\infty\right)$, το οποίο είναι η λύση της ανίσωσης $g\left(x\right)<f\left(x\right)$.

21001.Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x) = 2x - 1$ σε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων.



α) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $\sqrt{x}= 2x- 1$. **(Μονάδες 7)**
β) Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση $\sqrt{x}= 2x- 1$. **(Μονάδες 12)**
γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{x}> 2x- 1$. **(Μονάδες 6)**

Λύση

α) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στο σημείο $A(1,1)$, η τετμημένη του οποίου είναι η λύση της εξίσωσης $\sqrt{x}= 2x- 1$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $(x \geq 0)$ και $\left(2x-1\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{2}\right)$.

άρα ορίζεται για $x\geq \frac{1}{2}$.

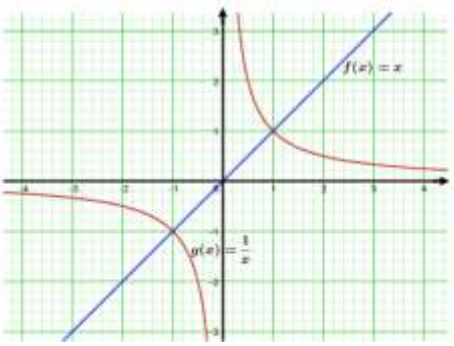
$\sqrt{x}=2x-1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}\right)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow x=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 4x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow$

$(x=1 \text{ δεκτή})$ ή $\left(x=\frac{1}{4} \text{ απορρίπτεται}\right)$.

$\left(\Delta=9, x_{1,2}=\frac{5\pm 3}{8}=\begin{cases}1\\ \frac{1}{4}\end{cases}\right)$.

γ) Η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g στο διάστημα $[0,1)$, το οποίο είναι η λύση της ανίσωσης $\sqrt{x}> 2x- 1 \Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

21000.α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x$ και $g(x)=\frac{1}{x}$, να λύσετε την ανίσωση $x>\frac{1}{x}$.



(Μονάδες 7)

β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα με τα πρόσημα των παραστάσεων $x, x-1, x+1, x(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$ $\quad -1$	0	1	$+\infty$
x				
x-1				
x+1				
x(x-1)(x+1)				

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $x>\frac{1}{x}$.

(Μονάδες 10)

Λύση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g για κάθε $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

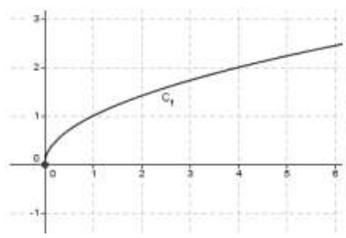
Άρα $f(x)>g(x)\Leftrightarrow x>\frac{1}{x}$ για κάθε $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

β)

x	$-\infty$ $\quad -1$	0	1	$+\infty$
x	–	–	+	+
x-1	–	–	–	+
x+1	–	+	+	+
x(x-1)(x+1)	–	+	–	+

γ) Είναι $x>\frac{1}{x}\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x}>0\Leftrightarrow x(x^2-1)>0\Leftrightarrow$
$x(x-1)(x+1)>0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

20344.Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}, x\geq 0$.



α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-1}=\frac{x}{2}$. **(Μονάδες 10)**

β) Να σχεδιάσετε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της $f(x)=\sqrt{x}$, τη γραφική παράσταση της $g(x)=\sqrt{x-1}$. (Μονάδες 8)

γ)Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων με τη γραφική παράσταση της g και τη γραφική παράσταση της ευθείας $y=\dfrac{x}{2}$. Κατόπιν να ερμηνεύσετε γραφικά τη λύση της εξίσωσης του ερωτήματος α). (Μονάδες 7)

Λύση

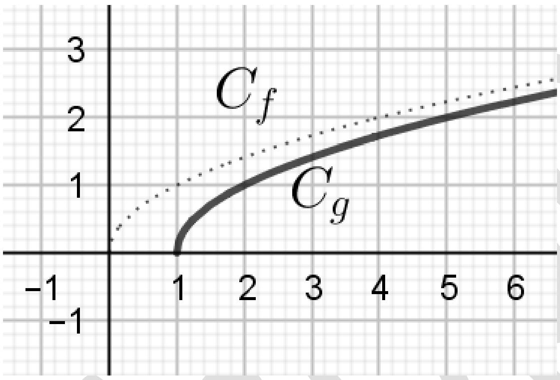
α) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $\left(x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1\right)$ και $\left(\dfrac{x}{2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0\right)$.

άρα ορίζεται για $x\geq 1$.

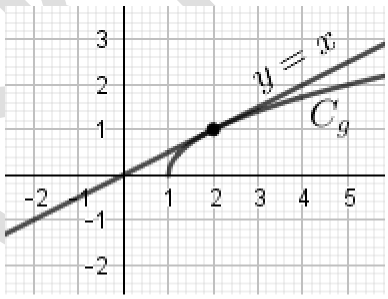
$\sqrt{x-1}=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}=x\Leftrightarrow \left(2\sqrt{x-1}\right)^2=x^2\Leftrightarrow 4\left(x-1\right)=x^2\Leftrightarrow 4x-4=x^2\Leftrightarrow$

$x^2-4x+4=0\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$.

β) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια μετατόπιση 1 προς τα δεξιά οπότε είναι η ακόλουθη:



γ) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται στο σημείο $(2,1)$, η τετμημένη του οποίου είναι η λύση της εξίσωσης $\sqrt{x-1}=\dfrac{x}{2}$.



ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

2ο Θέμα

21704. **Δίνεται ότι μία προσεγγιστική τιμή για τον δεκαδικό λογάριθμο log 2 είναι το 0,30. Να εφαρμόσετε τις ιδιότητες των λογαρίθμων : $\log\frac{\theta_1}{\theta_2}=\log\theta_1-\log\theta_2$ και $\log\theta^{\kappa}=\kappa\log\theta$ για να βρείτε μία προσεγγιστική τιμή για τους δεκαδικούς λογάριθμους:**

α) log4 **(Μονάδες 12)**

β) log5 **(Μονάδες 13)**

Λύση

α) $\log 4=\log 2^2=2\log 2=2\cdot 0,3=0,6$

β) $\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-0,3=0,7$.

17598.Δίνονται οι αριθμοί α = log 2 και β = log 5.

α) Να αποδείξετε ότι α+ β =1. **(Μονάδες 13)**

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης ln(α+β) . **(Μονάδες 12)**

Λύση

α) $\alpha+\beta=\log 2+\log 5=\log(2\cdot 5)=\log 10=1$.

β) $\ln(\alpha+\beta)=\ln 1=0$.

4ο Θέμα

20999. **Ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο για το πλήθος των ανθρώπων σε μια μαθητική κοινότητα που έχουν ακούσει μια συγκεκριμένη φήμη, περιγράφεται από την ισότητα $N = P\cdot(1-e^{-0,15k})$, όπου P ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας και k είναι ο αριθμός των ημερών που έχουν περάσει από τότε που ξεκίνησε η φήμη. Υποθέτουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας είναι 1000 άνθρωποι.**

α) Να βρείτε πόσα μέλη της μαθητικής κοινότητας θα έχουν ακούσει τη φήμη μετά από 20 ημέρες. **(Μονάδες 9)**

β) Πόσες ημέρες θα περάσουν ώστε να έχουν ακούσει τη φήμη 450 άνθρωποι από τους 1000; **(Μονάδες 10)**

γ) Είναι δυνατόν να ακούσουν τη φήμη όλα τα μέλη της κοινότητας; Εξηγήστε. **(Μονάδες 6)**

Δίνονται: $e^3\cong 20$ και $ln(0,55)\cong -0,6$.

Λύση

α) $N=P\cdot(1-e^{-0,15k})=1000\cdot(1-e^{-3})=1000\cdot\left(1-\frac{1}{e^3}\right)=1000\cdot\left(1-\frac{1}{20}\right)=1000\cdot\frac{19}{20}=950$.

β) $N=450\Leftrightarrow 1000\cdot(1-e^{-0,15k})=450\Leftrightarrow 1-e^{-0,15k}=\frac{45\cancel{0}}{100\cancel{0}}\Leftrightarrow e^{-0,15k}=1-\frac{\overset{9}{\cancel{45}}}{\underset{20}{\cancel{100}}}\Leftrightarrow e^{-0,15k}=1-\frac{9}{20}\Leftrightarrow$

$e^{-0,15k}=\frac{11}{20}\Leftrightarrow -0,15k=\ln\frac{11}{20}\Leftrightarrow k=-\frac{\ln 0,55}{0,15}\Leftrightarrow k=\frac{0,6}{0,15}\Leftrightarrow k=\frac{60}{15}=4$ ημέρες.

γ) $N=1000\Leftrightarrow 1000\cdot(1-e^{-0,15k})=1000\Leftrightarrow 1-e^{-0,15k}=1\Leftrightarrow e^{-0,15k}=0$ αδύνατο.

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2ο Θέμα

20997. Θεωρούμε τον αριθμό $p = log4 + 2 \cdot log5$.
α) Να αποδείξετε $log4 = 2log2$ και στη συνέχεια ότι $p = 2$. **(Μονάδες 15)**
β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε $\ln x = p$. **(Μονάδες 10)**

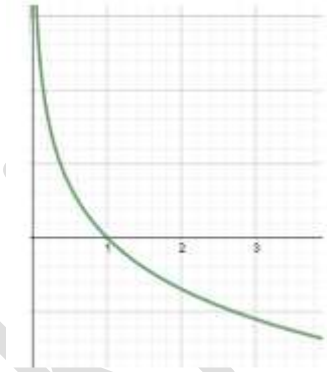
Λύση

α) Είναι : $\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$ και

$p = \log 4 + 2\log 5 = 2\log 2 + 2\log 5 = 2(\log 2 + \log 5) = 2\log(2 \cdot 5) = 2\log 10 = 2$.

β) $\ln x = p \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$.

15592. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{1}{|x|}, x \neq 0$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(-1)=f(1)=0$ και $f(-2)=f(2)$. **(Μονάδες 12)**
β) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για x>0 . Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , για $x<0$.

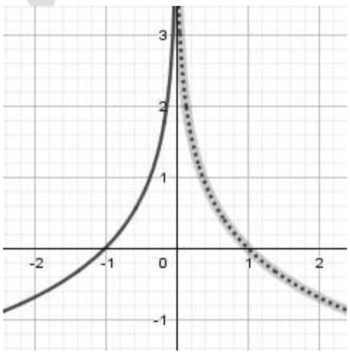


(Μονάδες 13)

Λύση

α) Είναι $f(1) = \ln\frac{1}{|1|} = \ln 1 = 0$.Η f είναι άρτια οπότε $f(-1) = f(1) = 0$ και $f(-2) = f(2)$.

β) Η f είναι άρτια άρα η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.



4ο Θέμα

20707.Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν x μονάδες ASA συνδέονται με y μονάδες DIN με τον τύπο $y = 1 + 10 \cdot logx$, τότε:
α) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 10. (Μονάδες 5)
β) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 200. (Μονάδες 8)
γ) Να επιλύσετε τον παραπάνω τύπο ως προς x. (Μονάδες 8)
δ) Να βρείτε πόσες μονάδες ASA είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες DIN, είναι 13. (Μονάδες 4)

Δίνεται ότι $log2 = 0{,}3$ και $10^{\frac{6}{5}} \cong 15{,}85$.

Λύση

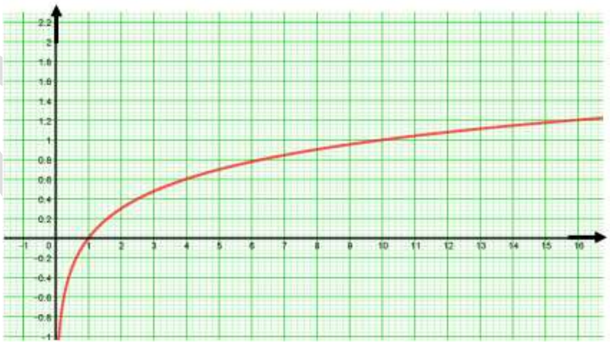
α) $y = 1 + 10 \cdot \log 10 = 1 + 10 = 11\,DIN$.

β) $y = 1 + 10 \cdot \log 200 = 1 + 10 \cdot \log(2 \cdot 100) = 1 + 10(\log 2 + \log 100) \Leftrightarrow$
$y = 1 + 10(\log 2 + \log 10^2) = 1 + 10\log 2 + 20 \Leftrightarrow y = 21 + 10 \cdot 0{,}3 \Leftrightarrow y = 24\,DIN$

γ) $y = 1 + 10 \cdot \log x \Leftrightarrow 10\log x = y - 1 \Leftrightarrow \log x = \dfrac{y-1}{10} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{y-1}{10}}$.

δ) $13 = 1 + 10 \cdot \log x \Leftrightarrow 10 \cdot \log x = 12 \Leftrightarrow \log x = \dfrac{12}{10} = \dfrac{5}{6} \Leftrightarrow \log x = \log 10^{\frac{5}{6}} \Leftrightarrow x = 10^{\frac{5}{6}} = 15{,}85\,ASA$.

20708.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = logx$, $x > 0$ και $g(x) = log(10x - 20)$, $x > 2$.
α) Να βρείτε τους αριθμούς $g(2{,}1)$ και $g(12)$. (Μονάδες 10)
β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = 1 + f(x - 2)$. (Μονάδες 8)
γ) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα στο γραπτό σας, το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης g. (Μονάδες 7)



Λύση

$g(x) = \log(10x - 20)$

α) Είναι $g(2{,}1) = \log(10 \cdot 2{,}1 - 20) = \log(21 - 20) = \log 1 = 0$,
$g(12) = \log(10 \cdot 12 - 20) = \log(120 - 20) = \log 100 = \log 10^2 = 2$.

β) Έχουμε : $g(x) = \log(10x - 20) = \log[10(x-2)] = \log 10 + \log(x-2) = 1 + \log(x-2) \Leftrightarrow$
$g(x) = 1 + f(x-2)$.

γ) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με οριζόντια μετατόπιση 2 μονάδες προς τα δεξιά και 1 μονάδα προς τα πάνω.