ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ (2)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α΄ ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β΄ ομάδα

Α΄ ομάδα		Β΄ ομάδα	
1.	$2x^2-3x-2$	Α.	$-(x-1)(x-3)$
2.	$-x^2+4x-3$	Β.	$(x-2)(2x+1)$
3.	$x^2-8x+15$	Γ.	$(2x-1)(-4x+3)$
4.	$-8x^2+10x-3$	Δ.	$(x-3)(x-5)$

β) Να αντιστοιχίσετε τις περιπτώσεις των ριζών του τριωνύμου της Α΄ ομάδας με τη διακρίνουσα του τριωνύμου της Β΄ομάδας όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα

Α΄ομάδα Ρίζες τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$		Β΄ομάδα Διακρίνουσα Δ	
Α.	ρίζες πραγματικές και άνισες	1.	$\Delta>0$
Β.	μία διπλή ρίζα	2.	$\Delta<0$
Γ.	πραγματικές ρίζες	3.	$\Delta=0$
Δ.	δεν έχει πραγματικές ρίζες	4.	$\Delta\geq 0$

40 μονάδες

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι παραστάσεις $A(x)=2x^2-x-1$, $B(x)=|3x-3|$ και $\Gamma(x)=x^2-2x+1$

α) Να λυθεί η ανίσωση $A(x)>0$ 10 μονάδες

β) Να λυθεί η ανίσωση $B(x)>2$ 10 μονάδες

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\Gamma(x)\leq 0$ 10 μονάδες

δ) Να λυθεί η ανίσωση $A(x)<\Gamma(x)\leq 4$ και να γραφούν οι λύσεις της σε μορφή διαστήματος 10 μονάδες

ε) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $A(2015)\cdot\Gamma(-2015)$ και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας 10 μονάδες

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ο

α) 1Β-2Α-3Δ-4Γ

β) Α1-Β3-Γ4-Δ2

ΘΕΜΑ 2ο

α) $A(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 > 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι : $x_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1$, $x_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ και ο πίνακας προσήμου του

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 2x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

β) $|3x - 3| > 2 \Leftrightarrow \left(3x - 3 > 2 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}\right)$ ή $\left(3x - 3 < -2 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}\right)$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων

$\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$

γ) α) $\Gamma(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$.

Έχει διπλή ρίζα την $x = \dfrac{2}{2} = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x^2 - 2x + 1$		$+$	0	$+$	

Η ανίσωσης έχει μοναδική λύση την x=1.

δ) $A(x) < \Gamma(x) \leq 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 < x^2 - 2x + 1 \leq 4$

Λύνουμε τις ανισώσεις:

- $2x^2 - x - 1 < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9$.

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 + x - 2$ είναι : $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$,

$x_1 = \frac{-1-3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$ και ο πίνακας προσήμου του

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	$-$	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $(-2,1)$

- $x^2-2x+1 \le 4 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \le 0$
  $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4+12 = 16$.

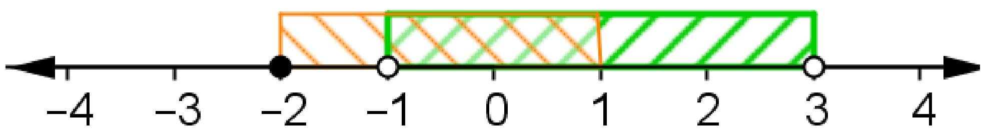
  Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-2x-3 είναι : $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$,

  $x_1 = \frac{2-4}{2} = -\frac{2}{2} = -1$ και ο πίνακας προσήμου του

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		+	0	$-$	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $[-1,3]$

Η λύση της ανίσωσης $2x^2-x-1 < x^2-2x+1 \le 4$ προκύπτει από τη συναλήθευση των δύο παραπάνω ανισώσεων οπότε είναι το διάστημα $[-1,1)$.



ε) Ο αριθμός $2015 \in (1,+\infty)$, όπου το τριώνυμο Α(x) είναι θετικό ,άρα ο αριθμός Α(2015) είναι θετικός .
Το τριώνυμο Γ(x) είναι παντού θετικό εκτός από τη ρίζα του το 1 οπότε ο αριθμός Γ(-2015) είναι θετικός .
Άρα το γινόμενο $A(-2015)\cdot\Gamma(2015)$ είναι θετικός αριθμός.

<u>ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΙΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ</u> (2)

<u>ΘΕΜΑ 1º</u>

α) Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α΄ ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β΄ ομάδα

Α΄ ομάδα		Β΄ ομάδα	
1.	$2x^2-3x-2$	Α.	$-(x-1)(x-3)$
2.	$-x^2+4x-3$	Β.	$(x-2)(2x+1)$
3.	$x^2-8x+15$	Γ.	$(2x-1)(-4x+3)$
4.	$-8x^2+10x-3$	Δ.	$(x-3)(x-5)$

β) Να αντιστοιχίσετε τις περιπτώσεις των ριζών του τριωνύμου της Α΄ ομάδας με τη διακρίνουσα του τριωνύμου της Β΄ομάδας όπως φαίνεται στον επόμενο πίνακα

Α΄ομάδα Ρίζες τριωνύμου $\alpha x^2+\beta x+\gamma$		Β΄ομάδα Διακρίνουσα Δ	
Α.	ρίζες πραγματικές και άνισες	1.	$\Delta>0$
Β.	μία διπλή ρίζα	2.	$\Delta<0$
Γ.	πραγματικές ρίζες	3.	$\Delta=0$
Δ.	δεν έχει πραγματικές ρίζες	4.	$\Delta\geq 0$

40 μονάδες

<u>ΘΕΜΑ 2º</u>

Δίνονται οι παραστάσεις $A(x)=2x^2-x-1$, $B(x)=|3x-3|$ και $\Gamma(x)=x^2-2x+1$

α) Να λυθεί η ανίσωση $A(x)>0$ 10 μονάδες

β) Να λυθεί η ανίσωση $B(x)>2$ 10 μονάδες

γ) Να λυθεί η ανίσωση $\Gamma(x)\leq 0$ 10 μονάδες

δ) Να λυθεί η ανίσωση $A(x)<\Gamma(x)\leq 4$ και να γραφούν οι λύσεις της σε μορφή διαστήματος 10 μονάδες

ε) Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου $A(2015)\cdot\Gamma(-2015)$ και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας 10 μονάδες

<u>Λύσεις</u>

ΘΕΜΑ 1ο

α) 1Β-2Α-3Δ-4Γ

β) Α1-Β3-Γ4-Δ2

ΘΕΜΑ 2ο

α) $A(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 > 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 1+8 = 9$.

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι : $x_1 = \dfrac{1+3}{4} = 1$, $x_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$ και ο πίνακας προσήμου του

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{2}$		1		$+\infty$
$3x^2-2x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

β) $|3x-3| > 2 \Leftrightarrow \left(3x-3 > 2 \Leftrightarrow 3x > 5 \Leftrightarrow x > \dfrac{5}{3}\right)$ ή $\left(3x-3 < -2 \Leftrightarrow 3x < 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{3}\right)$

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι η ένωση των διαστημάτων

$\left(-\infty, \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5}{3}, +\infty\right)$

γ) α) $\Gamma(x) \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \le 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4-4 = 0$.

Έχει διπλή ρίζα την $x = \dfrac{2}{2} = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2-2x+1		$+$	0	$+$	

Η ανίσωσης έχει μοναδική λύση την x=1.

δ) $A(x) < \Gamma(x) \le 4 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 < x^2 - 2x + 1 \le 4$

Λύνουμε τις ανισώσεις:

- $2x^2 - x - 1 < x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 0$

  $\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1+8 = 9$.

  Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 + x - 2$ είναι : $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1$,

$x_1 = \dfrac{-1-3}{2} = -\dfrac{4}{2} = -2$ και ο πίνακας προσήμου του

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		+	0	−	0	+	

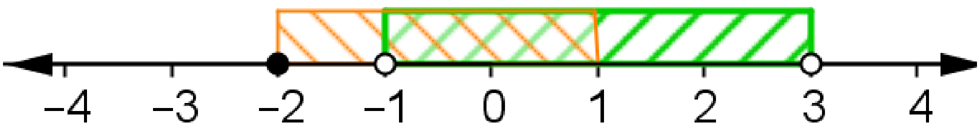
Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $(-2,1)$

- $x^2-2x+1 \le 4 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \le 0$
  $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4+12 = 16$.
  Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-2x-3 είναι : $x_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3$,
  $x_1 = \dfrac{2-4}{2} = -\dfrac{2}{2} = -1$ και ο πίνακας προσήμου του

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		+	0	−	0	+	

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι το διάστημα $[-1,3]$

Η λύση της ανίσωσης $2x^2-x-1 < x^2-2x+1 \le 4$ προκύπτει από τη συναλήθευση των δύο παραπάνω ανισώσεων οπότε είναι το διάστημα $[-1,1)$.



ε) Ο αριθμός $2015 \in (1,+\infty)$, όπου το τριώνυμο Α(x) είναι θετικό ,άρα ο αριθμός Α(2015) είναι θετικός .
Το τριώνυμο Γ(x) είναι παντού θετικό εκτός από τη ρίζα του το 1 οπότε ο αριθμός Γ(-2015) είναι θετικός .
Άρα το γινόμενο $A(-2015)\cdot \Gamma(2015)$ είναι θετικός αριθμός.