

# Διαγώνισμα διάρκειας 3 ωρών στις συναρτήσεις

## Θέμα Α

**Α 1.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f$ και $f^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

**μονάδες 5**

**Α2.** Πότε μία συνάρτηση λέγεται 1-1.

**μονάδες 5**

**Α3.** Πότε μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται γνησίως φθίνουσα .

**μονάδες 5**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της $g(x)=\sqrt{-x}$.

**β)** Η συνάρτηση f με σύνολο τιμών $f(A)=[2,4]$ έχει ελάχιστο το 2 και μέγιστο το 4.

**γ)** Αν για μία συνάρτηση ισχύει ότι η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία ρίζα , τότε η f είναι 1-1 συνάρτηση.

**δ)** Αν η ευθεία $x=\alpha,\alpha\in\mathbb{R}$ τέμνει τη γραφική παράσταση μιας καμπύλης το πολύ σ' ένα σημείο, τότε η καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α, Β αντίστοιχα, τότε η $f\circ g$ ορίζεται αν $g(B)\cap f(A)\neq\varnothing$.

**μονάδες 5x2**

## Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(\ln(1-x))-2x-1$ και $g(x)=-\sqrt{x-2}$ .

**Β1.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

**μονάδες 2**

**Β2.** Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=f\circ g$ και να βρείτε τον τύπο της.

**μονάδες 7**

**Β3.** Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις $f$ , $g$, $f\circ g$ .

**μονάδες 9**

**Β4.** Αν $g(k(x))=-x^2-1, x\in\mathbb{R}$ , να βρεθεί ο τύπος της k.

**μονάδες 7**

## Θέμα Γ

Δίνονται οι 1-1 συναρτήσεις f,g για τις οποίες ισχύουν:

- $g(x) \le e^x + 2 \le \dfrac{g(x+1)+2e-2}{e}$ .
- $f(x)+g^{-1}(x)=\ln(x-2)+e^x+x-1, x>2$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι $g(x)=e^x+2$ .

**μονάδες 6**

**Γ2.** Να δείξετε ότι $f(x)=e^x+x-1, x>2$ .

**μονάδες 6**

**Γ3.** Να βρείτε τον αριθμό $f^{-1}(e^3+2)$ .

**μονάδες 4**

**Γ4.** Να λύσετε την εξίσωση $g\left(f^{-1}(x)-4\right)=3$.

**μονάδες 5**

**Γ5.** Να δείξετε ότι $g^{-1}\left[3-g^2(x)\right]\le 0$.

**μονάδες 4**

## Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f,g,h$ για τις οποίες ισχύουν :

- $f(x)=\begin{cases} x, x\le\lambda \\ -x+2, x\ge\lambda \end{cases}$,
- $g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$
- $A_h=[\alpha,\beta]$
- $A_{h+g}=(\alpha,\beta]$ και
- $A_{\frac{h}{f}}=(\alpha,2)$.

**Δ1.** Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1 \\ -x+2, x\ge 1 \end{cases}$.

**μονάδες 6**

**Δ2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $m(x)=(g\circ f)(x)$ .

**μονάδες 6**

**Δ3.** Να δείξετε ότι :

**α)** $\alpha=0$ και

**β)** $A_h=[0,2]$.

**μονάδες 6**

Αν $h(x)=\sqrt{-x^2+2x}$ :

**Δ4.** Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\dfrac{h}{f}$ .

**μονάδες 7**

**Καλή τύχη!**

**Δημήτρης Πατσιμάς**

# Λύσεις

## Θέμα Α

**Α1.** Για την 1-1 συνάρτηση f ισχύει η σχέση $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$ οπότε **:**
αν ένα σημείο $(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f ,τότε το σημείο $(\beta,\alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση $C'$ της $f^{-1}$ και το αντίστροφο.
Επομένως οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και $f^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$ .

**Α2.**Μία συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται 1-1 ,όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή : αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

**Α3.** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ'ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της ,όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

**Α4. α)** Λ **β)** Σ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Λ

## Θέμα Β

**Β1.** Για να ορίζεται η f πρέπει: $1-x>0 \Leftrightarrow x<1$ και $\ln(1-x)>0 \Leftrightarrow \ln(1-x)>\ln 1 \Leftrightarrow 1-x>1 \Leftrightarrow x<0$ ,
άρα $D_f=(-\infty,0)$ .
Για να ορίζεται η g πρέπει: $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ , άρα $D_g=[2,+\infty)$ .

**Β2.** Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ -\sqrt{x-2}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x>2 \ .$$

Επομένως η $f \circ g$ έχει πεδίο ορισμού $D_{f \circ g}=(2,+\infty)$ και τύπο

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=\ln\left(\ln\left(1+\sqrt{x-2}\right)\right)+2\sqrt{x-2}-1 \ .$$

**Β3.** Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1<x_2$. Τότε :

$-2x_1>-2x_2 \Leftrightarrow -2x_1-1>-2x_2-1$ και

$-x_1>-x_2 \Leftrightarrow 1-x_1>1-x_2 \Leftrightarrow \ln(1-x_1)>\ln(1-x_2) \Leftrightarrow \ln(\ln(1-x_1))>\ln(\ln(1-x_2))\,(2)$

Από $(1)+(2) \Rightarrow f(x_1)>f(x_2) \Leftrightarrow f \searrow (-\infty,1)$.

- Έστω $x_1, x_2 \in D_g$ με $x_1<x_2$. Τότε :

$x_1-2<x_2-2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1-2}<\sqrt{x_2-2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1-2}>-\sqrt{x_2-2} \Leftrightarrow g(x_1)>g(x_2)$

οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

- Έστω $x_1, x_2 \in D_{f \circ g}$ με $x_1<x_2$. Τότε :

$g(x_1)>g(x_2) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(g(x_1))<f(g(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ g)(x_1)<(f \circ g)(x_2)$

οπότε η $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

**Β4.** Έχουμε :

$$g\left(h(x)\right)=-x^2-1 \Leftrightarrow -\sqrt{h(x)-2}=-x^2-1 \Leftrightarrow \sqrt{h(x)-2}=x^2+1 \Leftrightarrow h(x)-2=\left(x^2+1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$h(x)=2+\left(x^2+1\right)^2 \Leftrightarrow h(x)=x^4+2x^2+3, x\in\mathbb{R}$$

## Θέμα Γ

**Γ1.** Από τη σχέση που μας δίνεται έχουμε: $g(x)\le e^x+2$ και

$$e^x+2\le\frac{g(x+1)+2e-2}{e} \Leftrightarrow e^{x+1}+2e\le g(x+1)+2e-2 \Leftrightarrow e^{x+1}+2\le g(x+1) \ (*).$$

Από την (*) αν θέσουμε όπου $x+1$ το x έχουμε $e^x+2\le g(x)$ (2) .

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε $g(x)=e^x+2, x\in\mathbb{R}$ .

**Γ2.**Θέτουμε $g(x)=y \Leftrightarrow e^x+2=y \Leftrightarrow e^x=y-2$ .

Αν $y\le 2$ αδύνατη.

Για $y>2$ : $x=\ln(y-2) \Leftrightarrow g^{-1}(y)=\ln(y-2)$ οπότε:

$g^{-1}(x)=\ln(x-2), x>2$ και

$$f(x)+g^{-1}(x)=\ln(x-2)+e^x+x-1 \Leftrightarrow f(x)+\cancel{\ln(x-2)}=\cancel{\ln(x-2)}+e^x+x-1 \Leftrightarrow$$

$f(x)=e^x+x-1, x>2$ .

**Γ3.** $f^{-1}\left(e^3+2\right)=\kappa\in\mathbb{R} \Leftrightarrow f(\kappa)=e^3+2 \Leftrightarrow f(\kappa)=f(3) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} k=3$ οπότε :

$f^{-1}\left(e^3+2\right)=3$ .

**Γ4.** $g\left(f^{-1}(x)-4\right)=3 \Leftrightarrow g\left(f^{-1}(x)-4\right)=g(0) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} f^{-1}(x)-4=0 \Leftrightarrow f^{-1}(x)=4 \Leftrightarrow x=f(4) \Leftrightarrow x=e^4+3$

**Γ5.** Έστω $x_1,x_2\in D_g=\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Leftrightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1}+2<e^{x_2}+2 \Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Έχουμε $g^{-1}\left[3-g^2(x)\right]\le 0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g\left(g^{-1}\left[3-g^2(x)\right]\right)\le g(0) \Leftrightarrow 3-g^2(x)\le 3 \Leftrightarrow 3-\left(e^x+2\right)^2\le 3 \Leftrightarrow$

$\left(e^x+2\right)^2\ge 0$ ισχύει.

## Θέμα Δ

**Δ1.** Για να είναι η f συνάρτηση πρέπει οι τιμές της f και στους 2 κλάδους για $x=\alpha$ να είναι ίσες δηλαδή $\lambda=-\lambda+2 \Leftrightarrow 2\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=1$ άρα

$$f(x)=\begin{cases} x, x\le 1 \\ -x+2, x\ge 1 \end{cases}.$$

**Δ2.** Έχουμε $f(x)=\begin{cases} x, x\le 1 \\ -x+2, x\ge 1 \end{cases}$ και $A_{g\circ f}=\left\{x\in A_f \,/\, f(x)\in A_g\right\}$.

Έχουμε να λύσουμε τα συστήματα των ανισώσεων :

$$\begin{cases} x\le 1 \\ x\ne 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,1] \ .$$

Στην περίπτωση αυτή : $m(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ .

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ -x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in [1,2) \cup (2,+\infty).$$

Στην περίπτωση αυτή : $m(x) = \dfrac{e^{-x+2}+1}{e^{-x+2}-1}$.

Άρα $m(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x+1}{e^x-1}, x \in (-\infty,0) \cup (0,1] \\ \dfrac{e^{-x+2}+1}{e^{-x+2}-1}, x \in [1,2) \cup (2,+\infty) \end{cases}$.

**Δ3. α)** Έχουμε : $A_{h+g} = A_h \cap A_g = [\alpha,\beta] - \{0\}$.

Όμως $A_{h+g} = (\alpha,\beta]$ οπότε $\alpha = 0$.

**β)** Έχουμε :

Αν $x \leq 1$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

αν $x > 1$: $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ και

$A_{\frac{h}{f}} = \{x \in A_h \cap A_f \, / \, f(x) \neq 0\} = [0,\beta] - \{0,2\}$.

Όμως $A_{\frac{h}{f}} = (0,2)$ οπότε $\beta = 2$.

**Δ4.** Για $0 < x \leq 1$ έχουμε

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{-x^2+2x}}{x}.$$

Για $1 < x < 2$ έχουμε

$$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{h(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{-x^2+2x}}{-x+2}.$$

Άρα $\left(\dfrac{h}{f}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-x^2+2x}}{x^2+1}, 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{-x^2+2x}}{-x+2}, 1 < x < 2 \end{cases}$.