ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΤΗΝ ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Πεδίο ορισμού

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\\ 1, & x=1\end{cases}$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $F(x)=\int_2^x f(t)dt$ ii) $G(x)=\int_3^{\sqrt{x}} f(t)dt$

iii) $H(x)=\int_{\ln x}^{5-x} f(t)dt$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_2^x \dfrac{2}{3t+2}dt$ ii) $f(x)=\int_x^1 \dfrac{e^{2t}}{1+t^4}dt$ iii) $f(x)=\int_0^{x-1}\dfrac{1}{t-3}dt$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_{x-4}^{2\ln x}\sqrt{t-2}dt$ ii) $f(x)=\int_2^{-2x}(t^3-3t^2+1)dt$ iii) $f(x)=\int_3^{\ln x}\ln(e^{2t}-e)dt$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\int_1^x \ell n(1+e^t)dt$ ii) $f(x)=\int_1^x \dfrac{1}{t}\,dt$

iii) $f(x)=\int_2^x \dfrac{1}{\ell nt}\,dt$ iv) $f(x)=\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$

v) $f(x)=\int_1^x \dfrac{dt}{e^t-t}$

5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_0^x \dfrac{1}{t^4+1}dt$ ii) $f(x)=\int_1^x\left(\ln t-t^2\right)dt$ iii) $f(x)=\int_{-2}^x \sqrt[4]{t^2-1}dt$

iv) $f(x)=\int_1^{x^2-1}\dfrac{e^t\eta\mu 2t}{t}dt$ v) $f(x)=\int_5^{x-3}\dfrac{t^{10}+1}{t-2}dt$ vi) $f(x)=\int_4^{\frac{1}{x}}\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{\ln(t-2)}dt$

vii) $f(x)=\int_{-2}^{\sqrt{x-1}}\sqrt{9-t^2}dt$ viii) $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{2x}\sqrt{t^2-4}dt$ ix) $f(x)=\int_x^{3x-4}\sqrt{t-8}dt$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_1^x \dfrac{e^t}{e^t-1}\,dt$ ii) $f(x)=\int_{-2}^{\frac{1}{x}}\sqrt{t^2-3t}\,dt$

iii) $f(x)=\int_{e^{-x}}^{\sqrt{x}-2}\dfrac{t}{\ln t-t+1}dt$

7. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_0^{2x-1}\dfrac{1}{t-1}\,dt$ ii) $f(x)=\int_1^{3-x}\sqrt{t-1}\,dt$

iii) $f(x)=\int_2^{\ell nx}\ell n(e^t-1)dt$ iv) $f(x)=\int_2^{x^2}\sqrt{t^2-4}\,dt$

8. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_{x-1}^{x-2}\frac{\ell n(t-1)}{\sqrt{5-t}}dt$ ii) $f(x)=\int_{\ell nx}^{e^x-1}\sqrt{1-t^2}\ dt$

Παράγωγος της $F(x)=\int_a^x f(t)dt$

9. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f\left(x\right)=\int_3^x\frac{t^2+t}{t^2+1}dt$ ii) $f\left(x\right)=\int_0^{\eta\mu x}\sqrt{1-u^2}du$ iii) $f\left(x\right)=\int_{\sqrt{x-2}}^0 2\ln\left(t^2+4\right)dt$

iv) $f\left(t\right)=\int_x^{2x}\sigma\upsilon\nu^{10}tdt$ v) $f\left(x\right)=\int_{e^{-x}}^{e^x}\ln^6 udu$ vi) $f\left(x\right)=e^{\int_0^x e^t\sigma\upsilon\nu tdt}$

vii) $f\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\int_1^x\eta\mu^4tdt\right)$ viii) $f\left(x\right)=\int_1^x\frac{e^{u^2}}{x}du,\ x>0$ ix) $f\left(x\right)=\int_x^{x^2}e^x\left(\ln t-t^2\right)dt$

10. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $F(x)=\int_1^x\frac{t}{t-\eta\mu t}\ dt$ ii) $G(x)=\int_{\ln x}^2(t-e^t)dt$

ii) $H(x)=\int_{x^3+2}^{x^3+5}f(t)\ dt$,όπου f συνεχής συνάρτηση στο R

11. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_0^x\frac{2-e^t}{t^2+4}dt$ ii) $f(x)=\int_1^x\frac{\sqrt{2t^2+1}}{t^2+2}dt$ iii) $f(x)=\int_{x^2+1}^1\ln tdt$

12. Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_{\sqrt{x}}^{x^2+2}(e^{-t}+\eta\mu^2t)dt+\int_0^{2x}(1+\ln t)dt$ με x>0 ii) $f(x)=\int_2^{\sigma\upsilon\nu 2x}\frac{1}{\sqrt{2+t^2}}dt$

13. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_1^x(t^2+e^t-2)\ dt$ ii) $f(x)=\int_x^0\frac{e^t}{1+t^2}dt$

ii) $f(x)=\int_1^{-x}(t^2-2t)\ dt$ iv) $f(x)=\int_2^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}\ dt$

14. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των συναρτήσεων :

i) $f(x)=\int_{5-x}^{\ell nx}\sqrt{t-1}\ dt$ ii) $f(x)=\int_{x+3}^{\frac{1}{x}}\sqrt{t-3}\ dt$

iii) $f(x)=\int_{\ell nx}^{\ell n(x-1)}te^t\ dt$ iv) $f(x)=\int_x^{\sigma\varphi x}\frac{1}{1+t^2}\ dt$

15. Να υπολογίσετε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $F(x)=\int_2^x t^2dt\cdot\int_x^2(t+2)dt$ ii) $F(x)=\frac{\int_x^2(t+2)dt}{\int_2^x t^2dt}$

16. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\eta\mu\left(\int_1^x\sigma\upsilon\nu^2tdt\right)$ ii) $f(x)=\left(\int_2^x e^tdt\right)\left(\int_1^{x^4+1}\ln tdt\right)$

17. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\int_{1}^{x} x\eta\mu t\; dt$ ii) $f(x)=x^2+\int_{1}^{x}(x-t)e^t\; dt$

iii) $g(x)=\int_0^x x\left(\int_1^t f(u)du\right)dt$, όπου f συνεχής συνάρτηση στο R

18. Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x t\left(\int_1^{x^2} e^{2x} f(t)dt\right)dt$, x ∈R και f συνεχής συνάρτηση στο R.

i) Να δείξετε ότι h(x) = $\frac{x^2e^{2x}}{2}\int_1^{x^2} f(t)dt$ ii) Να βρείτε την h'

19. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(t)=\int_0^t\left(\int_1^{2+x^2}\frac{e^{-u^2}}{1+2u}du\right)dx$ ii) $f(x)=\int_0^x\left(x^2-t\right)\sqrt{t^4+1}dt$

20. Αν $f(x)=\int_{0}^{x}\left(\int_{0}^{t}\sigma\upsilon\nu^5 u\; du\right)dt$, να βρείτε την f ΄΄ .

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x\left(\int_1^t(1-e^u)du\right)dt$. Να βρείτε την f ''.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\left(\int_3^u\frac{1}{3+t^2}du\right)dt$. Να βρείτε την f ''.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\left(\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{\pi t}{2}+\beta\eta\mu\frac{\pi t}{2}\right)dt$. Να βρείτε τα α, β ∈ R ώστε να ισχύει f(l) = $\frac{2}{\pi}$ και f '(1) = 2.

24. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f '(e)≠0 για την οποία ισχύει:
$\int_2^x t^2 f'(t)dt=e^{f(x)}-e$, με x > 0 . Να δείξετε f (e) = 2 .

25. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\int_0^x(x-2)\frac{t+2}{t^2+4}dt$. Να βρείτε το $f'(0)$.

26. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_1^{2x} f(t)dt=2e^x(x-6)$. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(2,-4e)$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{4x-2}^{x+4}\sqrt{t^2+64}e^{t-6}dt$, $x,t\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(2,f(2))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=-30x+2014$.

28. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$f(x)+\int_0^x(x-t)f(t)dt=\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta,x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

29. Έστω συνάρτηση f συνεχής και περιττή στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ είναι άρτια.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(x)=\int_x^{2x}\frac{t^4-\sigma\upsilon\nu 2t}{t^2+4}dt$. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Παράγωγος της $\mathbf{F(x)=\int_\alpha^x f(x,t)dt}$

31. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x+\int_1^x t\eta\mu(x-t)\,dt$,x∈R

ii) $f(x)=x^2+x\cdot\int_0^1 \sigma\upsilon\nu(xt)\,dt$,x∈R

iii) $f(x)=1+x\cdot\int_1^{\frac{1}{2}} \ell n(2xt)\,dt$, x>0

iv) f(x) = e^x+ x $f(x)=e^x+x\cdot\int_1^x \eta\mu\frac{x}{t}\,dt$, x>0

32. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ, να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

i) $g(x)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(2x-t)\,dt$ και Δ = R

ii) $g(x)=1+x\int_1^x f(x-t)\,dt$ και Δ = R

iii) $g(x)=e^x+x\int_0^1 f(xt)\,dt$ και Δ = [0,+∞)

iv) $g(x)=x+x^2\cdot\int_0^2 tf\left(\frac{xt}{2}\right)dt$ και Δ = [0,+ ∞)

v) $g(x)=\ln x+x^2\cdot\int_1^x \frac{1}{t^3}f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ και Δ = [0,+ ∞)

vi) $g(x)=1+\frac{1}{x}\cdot\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt$ και Δ = (0,+ ∞)

33. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ , να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

i) $h(x)=\int_0^{\frac{1}{3}} f(3x-t)dt, \Delta=R$ ii) $h(x)=2-\frac{1}{x}\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)dt, \Delta=(0,+\infty)$

iii) $h(x)=2x\int_0^1 f(xt)dt, \Delta=(0,+\infty)$ iv) $h(x)=\int_0^x x^2u\eta\mu(xu)du, \Delta=R$

v) $h(x)=\int_0^x t\sigma\upsilon\nu(x-t)dt, \Delta=R$ vi) $h(x)=\int_0^x e^{tx}dt, \Delta=(0,+\infty)$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\mathbf{\int_\alpha^\beta F(x)dx}$ με $\mathbf{F(x)=\int_{x_0}^x f(x)dx}$

34. i) Έστω η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x e^{t^2}\,dt$.Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 F(x)\,dx$

ii) Αν η συνάρτηση f : R → R είναι συνεχής και $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ με $\int_0^1 F(x)dx=0$,να δείξετε ότι : $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$

35. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $I = \int_0^1 \left(\int_1^x \text{συν}t^2 \, dt \right) dx$ ii) $I = \int_0^1 \left(\int_1^x \sqrt{1+t^2} \, dt \right) dx$

36. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $I = \int_0^1 \left(\int_1^x \frac{3x^2}{1+t^2} dt \right) dx$ ii) $I = \int_0^\pi \left(\int_\pi^x \frac{\text{συν}x}{3+\text{ημ}^2 t} dt \right) dx$

Σταθερή Συνάρτηση

37. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_x^{x+1} e^{\eta\mu 4\pi t} dt$ είναι σταθερή.

38. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = $\int_x^{4+x} e^{\text{ημ}\frac{\pi t}{2}} dt$ είναι σταθερή στο R.

39. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f : (0, $\frac{\pi}{2}$) $\to$ R με f(x) = $\int_{\text{σφ}x}^{-\text{εφ}x} \frac{1}{1+t^2} dt$ είναι σταθερή.

40. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2+1} dt + \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2+1} dt$,x>0 είναι σταθερή και να βρείτε τη τιμή της.

41. Θεωρούμε τη συνάρτηση f(x)= $\int_{\frac{2}{e}}^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_{\frac{2}{e}}^{\sigma\varphi x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt$.Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

42. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με f (x) = $\int_2^x \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \eta\mu x dx \right) dt$, x$\in$R.Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

43. Έστω f(x)= $\int_x^1 \frac{e^t}{1-e^t} dt + \int_1^{-x} \frac{1}{1-e^t} dt$, x$\in$ R. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή συνάρτηση και να βρεθεί.

44. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x) = \int_0^x (x-t) f(t) dt - \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή και να βρείτε τη τιμή της.

45. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_2^{x+1} \frac{1}{t^2 - \lambda t + \lambda} dt + \int_2^{1+\frac{1}{x}} \frac{1}{t^2 - \lambda t + \lambda} dt$, $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της.

46. Αν η συνάρτηση f(x) = $\int_0^x \left(\int_0^t f(u) \, du \right) dx$ είναι συνεχής στο R, να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = (f '(x))^2 -f ^{2}(x) είναι σταθερή.

47. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και περιοδική με περίοδο $T \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

48. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : R $\to$ R για την οποία ισχύει για κάθε x $\in$ R
f(l + x) + f(l-x) = x^2+1

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = $\int_{1-x}^{1+x} f(t) \, dt - \frac{x^3}{3} - x$ είναι σταθερή.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 f(t)\, dt$

49. Έστω οι συναρτήσεις f(x) = $\int_1^x \frac{lnt}{t}\, dt$ και F(x) = f(x) + f$\left(\frac{1}{x}\right)$, x>0.Να δείξετε ότι F(x) = $\ln^2 x$

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \int_{\sigma\varphi x}^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2} dt$ και $g(x) = \int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x} \sqrt{1-t^2}\, dt$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

51. Να αποδείξετε ότι $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^{\frac{1}{t}} \ln t}{t^2} dt = \int_1^x e^t \ln t dt$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

52. Να αποδείξετε ότι $\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

53. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και F(x) = $\int_0^x (x-u) f(u)\, du$,

G(x) = $\int_0^x \left(\int_0^u f(t)\, dt \right) du$, να δείξετε ότι οι συναρτήσεις F και G είναι ίσες.

54. Έστω f : R →R μια αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη συνάρτηση με f(0)=0.Να δείξετε ότι :
$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = x f(x)$

55. i)Για κάθε x ∈ (0, $\frac{\pi}{2}$) να δείξετε ότι: $\int_1^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_1^{\sigma\varphi x} \frac{1}{t(1+t^2)}\, dt$

ii) Έστω f : R →R μια συνεχής συνάρτηση .Να δείξετε ότι
$\int_{\frac{1}{x}}^x f(t^5 + t^{-5}) \cdot \frac{1}{t} \cdot \ln t dt = 0$,για κάθε x>1

56. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_\alpha^\beta f(3x - t) dt$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
i) Να βρείτε την παράγωγο της g.
ii) Αν το $\xi = \frac{\beta}{3}$ είναι κρίσιμο σημείο της g και το 0 είναι το μοναδικό σημείο που μηδενίζει την f, να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

57. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f,g, ορισμένες στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $g(\alpha) = g(\beta)$. Αν είναι $g(x) = \int_\alpha^x \frac{g^2(t)}{f(t)} dt$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να αποδείξετε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Εύρεση τύπου της f .

58. Να βρείτε την συνεχή συνάρτηση f : R → R και τον αριθμό α όταν
    i) $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt =$ συνx-1, α ∈[0, π]   ii) $\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt =$ x^3+1

59. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων
    i) f(x) = $\int_{1}^{x} x\ell nt\ dt$ ii) $\int_{0}^{x} e^{x}$ημt dt

60. Να βρείτε τη συνάρτηση f : R → R όταν :
    i) $f(x)=\int_{x}^{2x} x$ημ$(t-x)\,dt$ ii) $f(x)=x^2\int_{0}^{x} t$ημ$(xt)\,dt$

61. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) = $\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{t+\ell nt}{t^2+1}\,dt-\ell nx$ είναι σταθερή στο (0, +∞) και να βρείτε τον τύπο της.

62. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο (0,+∞) και F(x)= $\int_{1}^{x} \frac{f(t)+3t}{1+t^2}dt+\int_{1}^{\frac{1}{x}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)-3t}{1+t^2}dt$. Να δείξετε ότι F(x) = 3lnx .

63. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη για κάθε x∈ [1,+∞) για την οποία ισχύει $2x+\int_{1}^{x} f(t)dt = xf(x)$. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

64. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο R . Αν ισχύει f (x) = $\int_{0}^{x} 3t^2 e^{t^3+2-f(t)}dt+2$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

65. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο (0,+ ∞) για την οποία ισχύει f (x) = $x^2+\frac{1}{x}\int_{1}^{x} f(t)dt$.
    Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

66. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο *R* για την οποία ισχύει f(x) = $2\int_{0}^{\frac{x}{2}} e^{-2t} f(x-2t)dt$, x∈R.Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

67. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [1, +∞) για την οποία ισχύει:
    $\int_{1}^{x} f(t)dt = (x+1)f(x)-2x+2006$. Να βρείτε τον τύπο της f.

68. Να βρείτε τον τύπο των παρακάτω συνεχών συναρτήσεων f όταν:
    i) $f(x)=1+\int_{1}^{x} \frac{f(t)}{x}\,dt$,x>0   ii) $f(x)=x^2-\int_{1}^{x} \frac{xf(t)}{t^2}\,dt$, x>0
    iii) $\int_{0}^{x} e^{x-t} f(t)\,dt = x^2e^x - f(x)$, x∈ R

69. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι
    $\int_{1}^{x} f(t)dt = \int_{\frac{1}{x}}^{1} x^2 tf'(xt)dt+(x^2-2x+2)e^x-2e$ για κάθε $x>0$. Αν $f(1)=-e$, τότε:
    i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}+e^x$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -xe^x,\ x > 0$.

70. Να βρείτε συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

i) $1+\int_1^x f(t)\,dt = \dfrac{f(x)}{x},\ x>0$ ii) $2\int_1^x xf(t)dt = f(x)-x,\ x>0$.

71. Να βρείτε συνάρτηση f, συνεχή στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

$x+\int_0^x f(t)dt = (x+1)f(x)$, για κάθε $x\ge 0$.

72. Να βρείτε παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

i) $f(x)=\int_0^x e^{t-f(t)}dt,\ x\in\mathbb{R}$ ii) $f(x)=\int_0^x 2ue^{u^2+4-f(u)}du+4$

iii) $f(x)=\int_1^x\left(2-\dfrac{1}{t^2}\right)e^{t^2}dt$

73. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

i) $f(x)+x=\int_1^x \dfrac{f(t)}{x}dt,\ \ x\in(0,+\infty)$

ii) $\int_0^x (1+t^2)f(t)\,dt-3x=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+f(x)(x^2-2x+3),\ x\in\mathbb{R}$

iii) $\int_0^x e^t\left(f(t)+1\right)dt=(e^x+2)f(x)-3\ln 3,\ x\in\mathbb{R}$

iv) $\int_0^x f(t)dt+\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du=2e^x-x-2,\ f(0)=1,\ x\in\mathbb{R}$

v) $\int_\alpha^x e^{-t}f(t)dt=e^{-x}-e^{-\alpha}-e^{-x}f(x)\ ,\ \alpha,x\in\mathbb{R}$

vii) $\int_0^x f(t)\,dt-2\int_0^{-x} f(t)\,dt=x^3-\dfrac{x^2}{2},\ x\in\mathbb{R}$

74. Να βρείτε τον τύπο παρακάτω συνεχών συναρτήσεων f όταν ισχύει :

i) $f(x)=2\int_1^x\left(\int_0^1 xf(t)dx\right)dt-x$,x∈R

ii) $f(x)=2\int_0^x\left(\int_1^e tf(t)\ell nx dx\right)dt$,x∈R

iii) $f(x)=x+\int_1^x\left(\int_0^\pi f(t)\eta\mu x dx\right)dt$,x∈R

75. Έστω μια συνάρτηση f με f΄΄ συνεχή στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και ισχύει

$\int_0^x f'(t)\eta\mu t\ dt = x-\int_0^x f''(t)\sigma\upsilon\nu t\ dt$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Αν $f(0)=-1$ και $f'(0)=0$, να βρείτε τον τύπο της f.

76. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:(-\infty,0]\to\mathbb{R}$ με $f(x)<0$ για κάθε $x\le 0$. Αν ισχύει

$f^2(x)=1+\int_0^x \dfrac{f(t)}{1+e^t}\,dt$, να βρείτε τον τύπο της f.

77. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : (1,+∞) → R με $f(x)=1+\int_e^x\left(\frac{f(t)}{t}+\frac{1}{\ell n^2 t}\right)dt$, x > 1. Να βρείτε τον τύπο της f.

78. Να βρείτε συνάρτηση f, συνεχή στο $(0,+\infty)$, για την οποία ισχύει:

i) $f(x)=\ln x-\int_{\frac{1}{x}}^{1}\frac{f(xt)}{t}dt$, $x>0$ ii) $4\int_0^1 f(tx)dt=f(x)$, $x>0$, $f(1)=1$

79. Να βρείτε συνάρτηση f : (1,+ ∞)→ R με f '' συνεχή για την οποία ισχύουν f(e) = 0,f '(e) = e^{-1} και $\int_e^x f''(t)\ell nt\; dt=\frac{1}{x}-\int_e^x\frac{1}{t}f'(t)\;dt-\frac{1}{e}$, x>1

80. Να βρείτε συνάρτηση f συνεχή στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ για την οποία ισχύει:

$f(x)-\int_0^x f(t)\varepsilon\varphi t dt=x$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$.

81. Να βρείτε συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)=\int_0^x\left(e^t-1\right)e^{-f(t)}dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

82. Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)=\int_1^x\left(1-\frac{1}{2t^2}\right)e^{t^2}\;dt$.

83. Να βρείτε παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt+2\int_0^x f(t)dt=2x$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=0$.

84. Έστω f : [0,+∞)→ R μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν f ΄(x) >0 ,x>0 και $\int_0^{f(x)}f^{-1}(t)dt=2\int_0^x f(t)dt$, $x>0$.Αν f(1)=1 ,να βρείτε την f .

85. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : (0, + ∞) → R για την οποία ισχύει για κάθε x>0, $\int_1^x f(t)\;dt=x+a+2\ell nx\int_1^e f(x)\;dx$ Να βρείτε το α και τον τύπο της f.

86. i) Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$\int_\alpha^x(x-t)f(t)dt=2x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

87. i) Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$\int_\alpha^x(x-t)f(t)dt=(x-2)e^x+e$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

88. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : (0, + ∞) → R για την οποία ισχύει

$f(x)=x+\int_x^{x^2}\frac{1}{t}f\left(\frac{t}{x}\right)dt$, x > 0

i) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

89. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f, για την οποία ισχύει:

i) $f(x) = 1 + 2\int_0^x \frac{f(x-t)}{e^t}\,dt$, $x \in R$

ii) $f(x) = x + \int_x^{x^2} \frac{1}{t} f\left(\frac{t}{x}\right) dt, x > 0$

iii) $f(x) = \frac{1}{x} + x\int_1^x f\left(\frac{x}{t}\right)\cdot\frac{dt}{t^3}, x > 0$

90. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ και $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{t}{f(t)}\,dt$ για κάθε $x \in R$. Να βρείτε τον τύπο της f.

91. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης $f : R \to R$ για την οποία ισχύει $f(x) = x + \int_0^x f(t)\,dt$

92. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^*$ με $f(x) = \int_{2-x}^{x} \frac{e^{-x} f(t)}{f(t) + f(2-t)}\,dt$, $x \geq 1$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(2) = \frac{1}{e^2}$

ii) Να βρείτε την f.

93. Να βρείτε συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = \int_0^x f(t)\,dt + x\int_0^1 f(x)\,dx + 1$

94. Να βρείτε συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x = \int_0^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.

Εύρεση τύπου της f με βοηθητική συνάρτηση.

95. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

i) $f(x) = 3\int_0^x \left(\int_0^1 x^2 f(t)\,dx\right) dt$,

ii) $f(x) = 2\int_1^x \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu x f(t)\,dx\right) dt$

iii) $f(x) = \int_0^x e^{-2x}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2t} f(t)\,\sigma\upsilon\nu x\,dx\right) dt$

iv) $f(x) = 2\int_0^x (e^x + 1)\left(\int_0^1 x f(t)\,dx\right) dt$

96. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

i) $f(x) = 2e^{2x} - \int_0^x e^t f(x-t)\,dt$, $x, t \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = e^{-x} + \int_0^x \frac{f(x-t)}{e^t}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$

iii) $\int_0^x f(t)dt = e^x + \int_0^x \left(\int_0^t e^{-u} f(t-u)\,du\right) dt$, $x \in \mathbb{R}$

97. Έστω f: $(-\infty, 1) \to R$ μία συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $e^x \cdot f(x) \neq 1$,για κάθε $x < 1$
- $e^x f(x) = 1 + e^x + e^x \cdot \int_0^x \left(f(t) - \mathrm{e}^{-t}\right)^2 dt$,,για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε την f.

98. Έστω f: R $\to$ R μία συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(x) \neq x$,για κάθε $x \in R$
- $f(x) = x + 1 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$,για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε την f.

99. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f η οποία είναι συνεχής στο R με f (x) > 0 και για την οποία ισχύει : $f(x) = \left(2 + x^2\right)\left[2 + \int_1^x \frac{f(t)}{2 + t^2} dt\right]$.

100. Να βρείτε συνεχή συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) = x + \int_x^{x^2} \frac{x}{t} f\left(\frac{t}{x}\right) dt$, για κάθε $x > 0$.

101. Έστω f: R $\to$ R μία συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση :

$f(x) = x + e^x + \int_0^x \frac{x + e^{-x}}{t + e^{-t}} f(t) dt$,για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε την f.

102. Έστω f: R $\to$ R μία συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση :

$e^{-x^2} f(x) - 2x\int_0^x e^{-t^2} f(t) dt = 2e^{x^2 + x}$,για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε την f.

103. Έστω f : [0, + ∞) $\to$ R μία συνάρτηση ,η οποία είναι συνεχής. Να βρείτε τον τύπο της όταν ισχύει g(x) = $2\left(f(x) - 1\right) \cdot \left(\int_0^x f(t) dt - x + 1\right) = e^x - 1, x \in [0, +\infty)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

104. Να βρείτε συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

i) $f(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t} f(t) dt,\ x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = 1 + 2\int_0^x e^{t-x} f(t) dt\ ,\ x \in \mathbb{R}$

105. Έστω f: R $\to$ R μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο. Να βρείτε τον τύπο της f όταν ισχύει:

i) $f(x) + (e^x - x)e^{f(x)} = 1 + \int_0^x (e^t - t) f'(t) \mathrm{e}^{f(t)} dt, x \in R,$

ii) $f(x) = \int_0^x \int_0^u \left(\frac{f'(t)}{f(t)} (f'(t) + f(t)) \mathrm{dt}\right) du, x \in R$

106. Έστω f: R $\to$R μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο που ικανοποιεί τις σχέσεις :

- $f(x) > 0$,για κάθε $x \in R$
- $f(x) = x + 1 + \int_0^x \left(\int_0^u \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot (f'(t) + f(t)) \mathrm{dt}\right) du$,για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε την f.

107. Έστω f,g: R $\to$ R δύο συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$ που ικανοποιούν τις σχέσεις :

- $f(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2t}}{g(t)} dt$,για κάθε $x \in R$
- $g(x) = 1 + \int_0^x \frac{e^{2t}}{f(t)} dt$,για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g.

108. Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f : R→ R για την οποία ισχύει

$f(x)=1+2\int_0^x \frac{f(x-t)}{e^t}\,dt$, x∈R

109. Έστω f : R → R μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+5f^4(t)}dt$,για κάθε x∈R.Να δείξετε ότι $f^5(x)+f(x)=x$ για κάθε x∈R.

110. Έστω f : R → R μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\int_0^{-f(x)} e^{-t^2}dt$,για κάθε x∈R.Να δείξετε ότι f(x) = 0 για κάθε x∈R.

111. Έστω f : R → R μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^{-f(x)} \eta\mu t^2 dt$,για κάθε x∈R.Να δείξετε ότι f(x) = 0.

112. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : (0, +∞) → R για την οποία ισχύει

$f(x)=\frac{1}{x}+x\int_1^x \frac{f\left(\frac{x}{t}\right)}{t^3}\,dt$,x>0. Να βρείτε τον τύπο της f.

Μελέτη της $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

113. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\int_3^{x^2-6x}\frac{1-e^t}{1+e^t}dt$.

114. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=\int_{2-x}^{e^x}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$.

115. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\int_e^x \frac{1-\ln t}{t^2}dt$.

116. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα, τη συνάρτηση: $f(x)=\int_2^x (t-2)e^{-t}dt$.

117. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

i) f(x) = $\int_2^x te^{2t}dt$ ii) f(x) = $\int_2^x \frac{e^{2t}}{t}dt$, x>0

118. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $\int_2^x te^{2t}(\ln t-1)dt$, x > 0. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία.

119. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $f(x)=\int_0^{2008} e^{-(x+t)^2}dt$.

120. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_e^{x-1}\frac{t^2-1}{\ell nt}\,dt$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

121. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{2}^{x}\sqrt{t^2-4}\;dt$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

122. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ με f(x)>0 ,x∈R.Να εξετάσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=x^2\int_0^x f(t)dt$

123. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

124. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής για κάθε x > 0 και f (x)>0.Να εξεταστεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση h(x) = $\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(x-t)dt}$.

125. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: f και f' γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^{f(x)} f(t)dt$

126. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=\int_x^{x^2}\ln t^2dt,\; x<0$

127. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to(0,+\infty)$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{\int_1^x f(t)dt}{\int_1^x tf(t)dt}$.

128. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\int_0^x t^\nu f(t)dt}{\int_0^x t^{\nu-1}f(t)dt}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

129. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_{e}^{\ell nx}\dfrac{t}{t-1}\,dt$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα κοίλα.

130. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^2|t-x|dt,\; x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την f'.
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

131. Να βρείτε τα σημεία που τέμνονται οι C_f, C_g όταν f (x) = $\int_0^x(t+1)dt$ και g(x) = $\int_x^2 tdt$.

132. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_{x^3}^{2-x} f(t)dt = x^3-6x^2+5$, $x,t\in\mathbb{R}$ και $f'(1)=\frac{1}{4}$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

133. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\int_1^{-x} xf(t)dt$ έχει κρίσιμο σημείο στο $x_1=-1$.

134. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{\int_0^x f(t)dt}-\ln x$ έχει το πολύ ένα κρίσιμο σημείο στο $(0,+\infty)$.

135. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x (t-1)e^t dt$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$.

136. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της C_f με f(x) = $\int_1^x (6t+1)dt$ στα σημεία της C_f στα οποία αυτή τέμνει τον χ΄χ.

137. Να βρείτε τα σημεία καμπής των συναρτήσεων:

i) f(x) = $\int_2^x (3t^2-2t)dt$ ii) f(x) = $\int_1^x (t^4-2t^2)dt$

138. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{\ell nx}+2\int_{\frac{1}{e}}^{x}\dfrac{1}{\ell n^2 t}\,dt$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρείτε που παρουσιάζει καμπή.

139. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$3xf(x^3)-2f(x^2)=\ln x$,$x>0$.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση $g(x)=\int_{x^2}^{x^3} f(t)dt,\ x>0$ και να αποδείξετε ότι $g(x)\geq 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2-1}{4}$, $x>0$

140. Δίνεται συνάρτηση g, παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,+\infty)$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση: $f(x)=\int_0^x \dfrac{g(t)}{x^2}dt$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

141. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με συνεχή παράγωγο και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,1)$ και $B\left(\frac{1}{2},0\right)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=\int_2^{f(x)}\frac{1}{1-f(t)}dt$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.
ii) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

142. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$,όπου $f(t)=\int_1^t\sqrt{u^2-u}\,du$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και F.
ii) Να δείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

143. Έστω οι συναρτήσεις $f(t)=\int_2^t\frac{1}{\ell nu}\,du$ και $F(x)=\int_3^x f(t)\,dt$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, F.
ii) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

144. Δίνεται η συνεχής και $1-1$ συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\mathrm{x}+\mathrm{t})dt,\ \alpha<\beta$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι η g δεν έχει ακρότατα.

145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x\frac{t-1}{e^t+1}dt,\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}dt-\ell nx.$

i) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\int_1^x\frac{e^t}{t}dt<\ell nx.$

147. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο (1,+∞) για την οποία ισχύει f '(x)-f(x)>0 με f(l) = 2e.

i) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο (1,+∞) .

ii) $\int_a^\beta f(x)dx>2\left(e^\beta-e^\alpha\right)$.

148. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [0,+ ∞) και f ' γνησίως φθίνουσα στο [0, ∞). Θεωρούμε την συνάρτηση h (x) = $\int_0^{2x}f(t)dt-2xf(x)$,x ∈[0,+ ∞).

i) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία.

ii) Να δείξετε ότι $\int_0^{2a}f(t)dt<2af(a)$, α∈ (0,+ ∞).

149. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [0,4] με f ΄ γνησίως φθίνουσα στο [0,4].

Ορίζουμε την h(x) = $\int_0^{\frac{x}{2}} f(t)dt - \frac{x}{2} f\left(\frac{x}{4}\right)$ στο [0,4].

i) Να μελετήσετε την h ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

ii) Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(t)dt < 2f(1)$.

150. Έστω μια συνάρτηση f : [0, + ∞) → R με f '(x)>0 για κάθε x > 0 και η F(x)=$\int_0^x f(t)\,dt$.

Να δείξετε ότι $\frac{1}{x}F(x) < F'(x)$ για κάθε x>0.

151. Έστω μία συνάρτηση f : [0, + ∞) → R ,η οποία είναι παραγωγίσιμη με f(0)=1 και f ΄(x) > 0 για κάθε x ≥ 0.Να δείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $F(x) = \int_0^1 xf(xt)dt$ είναι κυρτή και στη συνέχεια να βρείτε την εφαπτομένη ε της C_F στο $x_0=0$.

ii) Να βρείτε τις ρίζες της F και το πρόσημο της.

iii) $\int_0^1 x(1-f(tx))dt \le 0$ για κάθε x ≥ 0.

iv) $\int_0^1 f(xt)dt < f(x)$ για κάθε x > 0.

152. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_{-2}^{x} \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}\,dt$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να δείξετε ότι : $\int_{-2}^{x} \left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}\,dt \le 2\sqrt{e}-e$, για κάθε x < 0.

153. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f(x) = \int_0^x \frac{f(t)(e^t-1)}{e^t-t} + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε τον τύπο της f.

iii) Να βρείτε το πρόσημο της f.

154. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_1^x \ln\frac{e^t-1}{t}\,dt$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

iii) Να εξετάσετε την f ως προς τα κοίλα.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $\int_{x^2+1}^{e^x} \ln\frac{e^t-1}{t}\,dx > 0$

155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το πρόσημο της f ii) Να λύσετε την εξίσωση $\int_5^x f(t)dt = 0$.

156. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_e^x \frac{t}{\ell nt}\,dt$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii) Να δείξετε ότι $\int_e^3 f(x)\,dx \geq 0$

157. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = (x-l)ln(x-l)-x + 2 , x>1.

i) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 0$.
ii) Να δείξετε ότι $\int_2^5 (x-1)^{x-1}\,dx \geq \int_2^5 e^{x-2}dx$.
iii) Να μελετήσετε την h (x) = $\int_2^x f(t)dt$ ως προς την κυρτότητα και το σημείο καμπής.

158. Αν η συνάρτηση f : [0, + ∞) → R είναι συνεχής, να δείξετε ότι η g(x) = $4\int_0^{\frac{1}{2}} tf(2xt)\,dt$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

159. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x^2}$ και $F(x)=\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt, x>0$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση F.
ii) Να δείξετε ότι $F(x)>\frac{1}{2e}$,για κάθε x>0
iii) Να δείξετε ότι : $2e\int_0^1 f(t)dt<1$.

160. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : (0, + ∞) → R με f(l) = 2.

i) Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της $g(x)=\int_1^x \frac{f(t)}{x}\,dt$ στο $x_0 = 1$
ii) Αν η $h(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι κυρτή ,να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} h(x)$

Εύρεση ριζών και προσήμου της $G(x)=\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt$

161. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $G(x)=\int_{x+2}^{x^2}\frac{1}{1+t^2}dt$

162. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : R* → R με f(x) > 0 για κάθε $x \neq 0$ και η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.
ii) Να βρείτε τις ρίζες της F και το πρόσημο της.
iii) Να μελετήσετε την $G(x)=\int_2^x\left(\int_1^t f(u)\,du\right)dt$ ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις τοπικών ακρότατων.

163. Δίνεται η συνάρτηση $G(x)=\int_0^x\left(\int_{u-2}^{2u-1} e^{t^2}dt\right)du$.Να μελετήσετε την G ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

164. i) Να λύσετε την εξίσωση $\int_{1-\frac{1}{x}}^{\ln x} e^{-t^2}dt = 0$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\int_{1+x}^{e^x} \sqrt{1+t^4}dt > 0$

iii) Να δείξετε ότι $\int_{\ln(1+e^x)}^{e^x} e^{t^2}dt > 0$,για κάθε x∈R

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_0^{\ln(e^x-x)-1} e^{t^2}dt = 0$,έχει δύο ακριβώς ρίζες ετερόσημες.

165. Αν η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι και η $g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ είναι γνησίως αύξουσα.

166. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\int_{e^x}^{1-x} f(t)dt = 0$

167. Έστω μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ παραγωγίσιμη με $f(0)=0$ και $f'(x)>1$ για κάθε $x\geq 0$. Να δείξετε ότι $f^2(x)\geq 2\int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $x\geq 0$.

168. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to R$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$. Να δείξετε ότι $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt > 0$ για κάθε $x>0$.

169. Έστω $f:R\to R$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα.

i) Να λύσετε την εξίσωση $\int_{x^2+2}^{x^2+4} f(t)dt = \int_3^5 f(x)dx$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\int_{e^{-x}}^{2+e^{-x}} f(t)dt > \int_{2x+1}^{2x+3} f(t)dt$

iii) Να δείξετε ότι $\int_{\ln(1+x^2)}^{3+\ln(1+x^2)} f(t)dt \geq \int_{x^2}^{x^2+3} f(t)dt$,για κάθε x∈R

170. Έστω η f γνησίως αύξουσα στο R, $\int_0^1 f(x)dx = 1$ και $F(x)=\int_{x^2}^{x^2+1} f(t)dt$

i) Να εξετάσετε την F ως προς την μονοτονία

ii) Αν $\int_{a^2}^{a^2+1} f(x)dx = 2+\int_{\beta^2+1}^{\beta^2} f(x)dx$,να βρείτε τα α,β.

171. Αν η συνάρτηση $f:R\to R$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα να λύσετε την εξίσωση $\int_x^{3x-2} f(t)\,dt = 2\int_1^x f(t)\,dt$.

172. Έστω $f:R\to R$ μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

i) Να λύσετε την εξίσωση $\int_x^{2x-1} f(t)dt = \int_1^x f(t)dt$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\int_{x^2+1}^{2x^2+1} f(t)dt - \int_{x^4+1}^{2x^4+1} f(t)dt < \int_{x^4+1}^{x^2+1} f(t)dt$

173. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x \left(\frac{e^t}{t}-1\right)dt$.Να δείξετε ότι:

i) η f είναι γνησίως αύξουσα

ii) η εξίσωση $\int_{e^x-1}^{e^x+2} f(t)dt=\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{3x+1}{x}} f(t)dt$ έχει μοναδική ρίζα.

174. Αν η f : [0,2] → R είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)\le 1, x\in[0,2]$ και $\int_0^1 f(x)dx=0$,να δείξετε ότι:

i) $f(x)-f(\frac{x}{2})\le \frac{x}{2}, x\in[0,2]$ ii) $\int_0^2 f(x)dx\le 1$

175. Έστω μια συνάρτηση f : R→ R η οποία είναι συνεχής, γνησίως αύξουσα και περιττή.

Να δείξετε ότι η $g(x)=\int_0^x (x-t)^2 f(t)\, dt$ είναι κυρτή.

176. Αν η συνάρτηση f : R → R είναι συνεχής και ισχύει $f(x)<\int_0^x f(t)dt$ για κάθε x∈R,να δείξετε ότι $x\cdot\int_0^x f(t)dt<0$,για κάθε x ≠0.

177. Έστω η f : [0,2] → R είναι παραγωγίσιμη και κυρτή. Αν $g(x)=\int_0^x f(t)dt-xf\left(\frac{x}{2}\right)$ να δείξετε ότι :

i)η g γνησίως αύξουσα στο [0,2] ii) $\int_0^2 f(x)dx>2f(1)$

178. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

i) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της.

ii) Να δείξετε ότι $\int_0^x tf(t)\,dt>\int_0^x \ell n(1+t^2)dt$ για κάθε x > 0.

ΣΤ. Ανισοτικές Σχέσεις

179. Να δείξετε ότι $-\frac{7}{3}\le\int_1^x\left(2t^2-2t-4\right)dt\le\frac{13}{3}$ με x∈[0,3].

180. Να δείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει $\int_0^{e^x}\ln\left(t^2+2\right)dt>\int_0^{\frac{1}{1+x}}\ln(t^2+2)dt$.

181. Να αποδείξετε ότι

i) $\int_0^x e^{et+1}dt\ge e\int_0^x\sqrt{t^2+1}dt,\ x\ge 0$

ii) $\int_1^x e^{t^2}dt\ge\int_1^{e\ln x} e^{t^2}dt,\ x>0$

iii) $\int_0^{e^x}\eta\mu^{100}\text{tdt}\le\int_0^{1+xe^x}\eta\mu^{100}\text{tdt},\ x\in\mathbb{R}$

iv) $\frac{x^2}{\ln x}>1-\int_{e^2}^x\frac{dt}{\ln t},\ x>e^2$

182. Να δείξετε ότι:

i) $x-\frac{x^3}{5}\le\eta\mu x$ για κάθε x ∈ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ii) $-\frac{x^2}{2}\le\sigma\upsilon\nu x\le-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{20}$ για κάθε x ∈ $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

183. Να δείξετε ότι :

i) $\dfrac{x}{\ell nx}-\displaystyle\int_{e}^{x}\dfrac{1}{\ell nt}\,dt<e$ για κάθε x > e ii) $\displaystyle\int_{0}^{x}e^{t^2}\,dt\le xe^{x^2}$ για κάθε x > 0 .

184. Έστω f: R $\rightarrow$ R μια συνεχής συνάρτηση με f(x)>0 για κάθε x $\in$R.Να δείξετε ότι :

$x^2e^{-2x}\int_0^x f(t)dt<\int_0^{e^x} f(t)dt$.

185. Έστω f: (0, +∞) $\rightarrow$ R μια συνεχής συνάρτηση ,για την οποία ισχύει : $\int_1^x f(t)dt<x(f(x)-1)$, για κάθε x > 0.Να δείξετε ότι :

i) $\int_1^x f(t)dt>x\ln x, x>1$ και

ii) $\int_1^x f(t)dt<x\ln x, x\in(0,1)$

186. Έστω f: [-1, +∞) $\rightarrow$ R μια συνεχής συνάρτηση ,για την οποία ισχύει : $f(x)>2x\int_{\frac{1}{x}}^{1} f(\mathrm{x}t)dt$,

για κάθε x > 1.Να δείξετε ότι f(x)>0 για κάθε x>1.

187. Αν η συνάρτηση f: [0,2] $\rightarrow$ R είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)\le 1, x\in[0,2]$ και $\int_0^1 f(\mathrm{x})dx=0$, να δείξετε ότι:

i) $f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)\le\dfrac{x}{2}, x\in[0,2]$ ii) $\int_0^2 f(x)dx\le 1$.

188. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι $\int_0^x tf(t)dt<x\int_0^x f(t)dt$ για κάθε $x>0$.

189. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\ge 0$. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt<f(x)$ για κάθε $x>0$.

190. Έστω f: [0,2] $\rightarrow$ R μία συνάρτηση ,η οποία είναι κυρτή. Αν $g(x)=\int_0^x f(t)dt-xf\left(\dfrac{x}{2}\right)$,να να δείξετε ότι:

i) g1 $[0,2]$ ii) $\int_0^2 f(x)dx>2f(1)$.

191. Έστω f: (0, +∞) $\rightarrow$ R μια συνάρτηση με f(1)=-1 ,η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{g}(x)=\int_2^t \dfrac{f(t)+1}{t-1}dt$ είναι κυρτή.

192. Έστω f: [1, +∞) $\rightarrow$ R μια συνάρτηση ,η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι :

i) η συνάρτηση $\mathrm{g}(x)=\dfrac{1}{x-1}\int_1^t f(t)dt$ είναι γνησίως αύξουσα

ii) $\int_1^x f(t)dt\ge(x-1)\int_1^2 f(t)dt$,για x$\geq$2

193. Έστω f: [0, +∞) $\rightarrow$ R μια συνάρτηση με f(0)=0,η οποία είναι κυρτή. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\mathrm{g}(x)=\int_0^x \dfrac{f(t)}{x^2}dt$ είναι γνησίως αύξουσα

194. Έστω $f : R \to R$ μια συνεχής συνάρτηση με $\int_1^x f(t)dt \ge \frac{1-x^3}{3}, x \in [0,1]$,να δείξετε ότι $\int_0^1 xf(x)dx \le -\frac{2}{9}$

195. Έστω f: $R \to R$ μία συνάρτηση με f(0)=0 ,η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο συνεχή και ισχύει 0<f(x)<f΄(x) , για κάθε x $\neq$0.Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^{xe^{-x}} f(te^x)dt$

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση g.

ii) Να δείξετε ότι : $\int_1^2 f(t)dt > (e-1)\int_0^1 f(t)dt$.

196. Να δείξετε ότι :

i) $e^x \ln 2 \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \le e^{2x} \ln 2, x > 0$

ii) $\eta\mu x \cdot \ln 2 \le \int_x^{2x} \frac{\eta\mu t}{t} dt \le \eta\mu 2x \cdot \ln 2, x\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

iii) $x\ln 2 \le \int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t} \le x^2 \ln 2, x > 1$

197. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{2\pi} (\sigma\upsilon\nu x)^{1821} \mathrm{dx} + 2\pi \ge 0$.

198. Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{17} < \int_0^2 \frac{4}{t^4+1}dt - \int_0^1 \frac{4}{t^4+1}dt < 2$.

199. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
$\int_{x-1}^{x} f(t)dt < f(x) < \int_x^{x+1} f(t)dt , \; x,t \in \mathbb{R}$

200. Να δείξετε ότι $\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{e^{xt}}{t^2} dt \le e(1-x)$ για κάθε x>1.

201. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x) = e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^x f(t)dt + \int_0^{6-x} f(t)dt \ge 2\int_0^3 f(t)dx , \; x \in \mathbb{R}$.

202. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $0 < f'(x) < 1$ για κάθε $x \in (0,1)$.Να αποδείξετε ότι: $\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 > \int_0^1 f^3(x)dx$

203. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ και $0 < f''(x) < f^2(x)$ για κάθε $x \neq 1$. Να αποδείξετε ότι:
$\left(\int_1^x f^2(t)dt\right)^2 > \frac{2}{3} f^3(x)$ για κάθε $x > 1$.

204. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_2^x e^{t^2} dt, \; x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι: $f(x) \ge \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^4$ για κάθε $x \ge 0$.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_0^2 f(x)dx$.

205. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{\ln x}-\int_\alpha^x \dfrac{dt}{\ln t},\ x\ge\alpha,\ \alpha>e^2$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta \dfrac{dt}{\ln t}<\dfrac{2\beta}{\ln\beta}-\dfrac{2a}{\ln a},\ e^2<\alpha<\beta$.

206. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, με $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έστω $F(x)=\int_0^{xe^x} f\left(te^{-x}\right)dt$. Να αποδείξετε ότι $F(33)<F(1821)$.

207. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f,g, για τις οποίες ισχύει ότι:
$\int_{\frac{1}{x}}^1 g(xt)dt+f(x)<g(x)+\int_1^x \dfrac{f(t)}{x}dt$, για κάθε $x\ge1$. Να αποδείξετε ότι:

i) $x\big(g(x)-f(x)\big)>\int_1^x\left[g(t)-f(t)\right]dt$

ii) $g(x)>f(x)$ για κάθε $x\in[1,+\infty)$.

208. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\int_0^x f(t)dt>f(x)$ για κάθε $x\ge0$. Να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\ge0$.

209. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $0<f(x)<f'(x)$ για κάθε $x\ne0$.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^{xe^{-x}} f\left(te^x\right)dt$.

ii) Να αποδείξετε ότι $g(x)\ge0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$.

210. i) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^3}=x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Για κάθε $\alpha,\beta\in(0,+\infty)$ με $\alpha<\beta$, να αποδείξετε ότι $\int_\alpha^\beta \dfrac{e^{t^3}}{t^3+1}dt>\beta-\alpha$.

211. i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x)=\int_1^x t^8e^{t^2}dt,\ x\in\mathbb{R}$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\int_{\ln x}^{x-1} t^8e^{t^2}dt=0$.

212. Έστω f,g : [0,+∞) → R δύο συνεχείς συναρτήσεις με f(x)>0,x>0 και η g γνησίως αύξουσα στο [0,+∞),να δείξετε ότι η $F(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$ είναι γνησίως αύξουσα.

213. Έστω f,g : [0,+∞) → R δύο συνεχείς συναρτήσεις με f(x)>0,x≥0.Να δείξετε ότι η $g(x)=\dfrac{\int_0^x t^2f(t)dt}{\int_0^x tf(t)dt},x>0$ είναι γνησίως αύξουσα.

214. Έστω f : $[0,+\infty) \to R$ μία συνάρτηση ,η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι : $\int_0^x f(t)dt < \dfrac{2\int_0^x tf(t)dt}{x}$,για κάθε x>0.

215. Έστω μια συνάρτηση f: $[0, +\infty) \to R$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με f(0) = f '(0) = 0. Αν για κάθε x>0 ισχύουν f(x) > 0 και f '(x)<x, να δείξετε ότι ισχύει :

$$\int_0^x tf^3(t)\,dt < \left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2$$ για κάθε x > 0.

216. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και f΄(x)<0 , x∈[α, β] . Να δείξετε ότι $\int_a^\beta xf(x)dx < \dfrac{a+\beta}{2}\int_a^\beta f(x)dx$.

217. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με f ''(x)>0 για κάθε x ∈[α,β]. Να δείξετε ότι $\int_a^\beta f(x)dx > (\beta\text{-}\alpha)\, f\left(\dfrac{a+\beta}{2}\right)$

218. i) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β], να δείξετε ότι : $\int_a^\beta f(a+\beta-x)\,dx = \int_a^\beta f(x)\,dx$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο [α, β], να δείξετε ότι:

α) $f(x) + f(\alpha + \beta\text{-}x) \le 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, x∈[α, β]

β) $\int_a^\beta f(x)\,dx \le (\beta\text{-}\alpha)\, f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

219. Έστω f,g : [α ,β] →R δύο συνεχείς συναρτήσεις γνησίως αύξουσες. Να δείξετε ότι :

$$\int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g(x)dx < (\beta-\alpha)\int_a^\beta f(x)g(x)dx$$

220. Έστω f : R →R μία συνάρτηση με f΄(x)>0 , για κάθε x ∈R. Να δείξετε ότι :

$$2\int_0^{\frac{x+y}{2}} f(t)dt < \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f(t)dt$$,για κάθε x≠y.

221. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$ με $f'(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_1^x f(t)dt > (x-1)f(x)$ για κάθε $x\in(1,2]$.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,2]$.

iii) $\int_1^2 f(t)dt \le \dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$.

Ζ. Θεωρήματα ύπαρξης.

Θ.Bolzano-Θ.Ε.Τ-Μονοτονία

222. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [1,2] και ισχύει f(x) < 1 για κάθε x∈ [1,2].Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_1^x f(t)\,dt = x^2 - 3$ έχει μοναδική ρίζα στο (1,2).

223. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [0, 2] και ισχύει f(x) < 2 για κάθε x ∈ [0, 2]. Να δείξετε ότι η ευθεία y = 3x - 2 τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x) = $\int_0^x f(t)\,dt$ σε ένα μόνο σημείο.

224. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $\int_\alpha^\xi f(x)dx = \int_\xi^\beta f(x)dx$.

225. Έστω μια συνάρτηση f : [0,1] → R η οποία είναι συνεχής και ισχύει f(x)>-l για κάθε x ∈ [0,1]. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε :
$$\int_0^{x_0} f(t)\,dt + \int_1^{x_0} f(t)\,dt = 1 - 2x_0$$

226. Έστω μια συνάρτηση f : R → R η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,3)$ τέτοιο ώστε :
$$\int_1^3 f(t)\,dt + \int_3^5 f(t)\,dt = 2\int_{x_o}^{x_0+2} f(t)dt$$

227. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [2,4] για την οποία ισχύει $\int_2^4 f(x)dx = -4$. Αν f (x) > 1 για κάθε x ∈ (2,4).Να δείξετε ότι η εξίσωση $6 + \int_2^x f(t)dt = x$ έχει μία μόνο λύση στο (2,4).

228. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [0,1] και ισχύει f(x)<0<g(x) για κάθε x ∈[0,1] να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ ∈ (0,1) τέτοιο ώστε
$\int_0^\xi f(t)\,dt + \int_\xi^1 g(t)\,dt$ =0.

229. Δίνεται συνάρτηση g, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha,\beta \in (0,1)$, $\alpha < \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε: $x_0\int_\beta^{x_0} g(t)dt = (x_0 - 1)\int_\alpha^{x_0} g(t)dt$.

230. Έστω μια συνάρτηση f : [0,1] → R. η οποία είναι συνεχής και ισχύει f(x) > 1 για κάθε x∈ [0,1]. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ ∈ (0,1) τέτοιο ώστε $e^\xi + \int_0^\xi f(x)\,dx = 2$

231. Αν 0 < α < β < 1 και η συνάρτηση f : [α, β] → R είναι συνεχής με $\int_\alpha^\beta f(x)dx \neq 0$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $(x_0 - 1)\int_\alpha^{x_0} f(t)\,dt = x_0\int_\beta^{x_0} f(t)\,dt$

232. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, για την οποία ισχύει: $\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(t)dt = 2\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\alpha} f(t)dt$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ τέτοιο, ώστε: $\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = 0$.

233. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις g,h στο $[\alpha,\beta]$, με $g(x)h(x)<0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\int_{\alpha}^{t} g(x)h(x)dx = \theta\int_{t}^{\beta} g(x)h(x)dx$ με $\theta>0$, έχει μοναδική ρίζα στο (α,β).

234. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3e-2<f(x)<3+3x$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

i) $e^x \ge x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt = 3e^x-2$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

235. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\ge 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2-5x+1-\int_0^{x^2-5x} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $g(-3)g(0)<0$.

ii) Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-3,0)$.

236. Να δείξετε ότι:

i) $\sqrt{e} \le \int_1^2 e^{\frac{1}{x}}dx \le e$

ii) Η εξίσωση $\int_1^x e^{\frac{1}{t}}dx = (x^2-3)e$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

237. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $\int_2^x \frac{e^t}{t^2+3}dt$, α > 0, x∈ R. Να δείξετε ότι:

i) Η f είναι κυρτή για κάθε x ∈ R.

ii) Η εξίσωση $3e^x = x^2+3$ έχει μοναδική λύση στο R.

238. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g,h, συνεχείς στο $[0,1]$ με $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$, $\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{6}$ και $\int_0^1 h(x)dx=\frac{1}{12}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi)+g(\xi)+h(\xi)=\xi$.

239. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,5]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[1,5]$ τέτοιο, ώστε: $\int_1^{\xi} f(t)dt = \int_1^3 f(t)dt + \frac{1}{2}\int_3^5 f(t)dt$.

240. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε: $\int_{\alpha}^{\xi} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt + \frac{2}{3}\int_{\frac{\alpha+\beta}{3}}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(t)dt + \frac{1}{3}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(t)dt$.

241. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,4]$ με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[0,4]$.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,4)$ για το οποίο ισχύει:

$$\int_0^{x_0} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{2}{3}\int_1^2 f(t)\,dt + \frac{1}{3}\int_2^3 f(t)\,dt$$

242. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $\mathrm{f}(\alpha)\cdot\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)\,dx < 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε $\mathrm{f}(\xi_1) = \int_\alpha^{\xi_2} f(x)\,dx = 0$.

243. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta) > 0$ και $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $\int_\beta^\xi f(x)\,dx = 0$.

Θ.Rolle

244. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : [0,1]$\rightarrow$ R με $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{3}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0^2$.

245. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο [α, β] να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)\displaystyle\int_\alpha^\xi f(t)dt = f(\xi)\int_\xi^\beta g(t)dt$.

246. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο R και την $g(x) = (x-\beta)\int_a^x f(t)dt$ ορισμένη στο [α, β].

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = \dfrac{1}{\beta - x_0}\displaystyle\int_a^{x_0} f(t)dt$.

247. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο [0,1] για την οποία ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = \dfrac{1}{2005}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε $f(\xi) = \xi^{2004}$. Ι

248. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο [1,4]. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,4)$ ώστε $\int_\xi^1 f(t)dt = (\xi - 4)f(\xi)$.

249. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ με $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$ και $\int_0^2 f(x)dx = 16$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3x^2 + 4x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,2)$.

250. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,3)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_1^\xi \sqrt{t^2+1}\,dt = (3-\xi)\sqrt{\xi^2+1}$$

251. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[2,4]$ με $f(2) = 0$ και $\int_2^4 f(x)dx = f(4)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,4)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

252. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_\alpha^{\alpha+1} f(t)\,dt = \int_{\alpha+1}^{\alpha+3} f(t)\,dt = 1$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = \dfrac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

253. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$.Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε : $\int_1^{\xi} f(t)dt-\int_{\xi}^2 f(t)dt=(3-2\xi)\mathrm{f}(\xi)$.

254. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_2^{20} f(5x)dx=2\int_1^5 f(10x)dx$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{f}(\mathrm{x})=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(50,100)$.

255. Έστω f : R→ R μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $2\int_0^{\xi^2-\xi} f(t)dt=-\xi(2\xi-1)f(\xi^2-\xi)$.

256. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : [α, β] → R με α>0 και $\int_a^{\beta} f(x)dx = 0$.Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (α, β) τέτοιο ώστε $\int_a^{\xi} f(x)dx = \xi f(\xi)$.

257. Έστω μια συνάρτηση f : [0,1] → R η οποία είναι συνεχής με $\int_0^1 f(t)dt=0$.Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (0,1) τέτοιο ώστε : $\int_0^{\xi} f(t)dt = f(\xi)$

258. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $\int_1^2 f(x)dx=0$.Να αποδείξετε ότι $f(1)f(2)<0$.

259. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και η συνάρτηση $g(x)=(2-x)\int_1^x f(t)dt$, $\mathrm{x}\in[1,2]$.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και να βρείτε την g' .

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $\int_1^{\xi} f(t)dt=(2-\xi)f(\xi)$.

260. Δίνεται συνάρτηση g συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση $h(x)=\int_{\alpha}^{x} g(t)\,dt+\int_{\alpha}^{\alpha+\beta-x} g(t)\,dt$, $x\in[\alpha,\beta]$.

i) Να αποδείξετε ότι εφαρμόζεται για την h θεώρημα Rolle στο $[\alpha,\beta]$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(\xi)=g(\alpha+\beta-\xi)$

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} g(\alpha+\beta-x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$

261. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $\int_2^{\xi} f(t)dt=(1-\xi)f(\xi)$.

262. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,2]$ με $3\int_0^2 f(x)dx=8$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi)=\xi^2$.

263. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g, συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

264. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi)=\xi\eta\mu\xi$.

265. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε: $f(\xi)\varepsilon\varphi\xi=\int_\xi^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

266. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : [α,β] → R για την οποία ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\beta f(\beta)-af(a)$. Αν η f ΄ είναι συνεχής στο [α,β],να αποδείξετε ότι :

i) $\int_\alpha^\beta xf'(x)dx=0$

ii) υπάρχει c ∈(α,β) τέτοιο ώστε f ΄(c) = 0

267. Έστω μια συνάρτηση f : [-l, 1] → R συνεχής με $\int_{-1}^{1} f(t)dt=0$ και η συνάρτηση F(x) = $\int_{-1}^{1}(x-1)f(tx-t)dt$ με x ∈ [0,1]. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈ (0,1) τέτοιο ώστε f (1 - ξ)+ f (ξ -1) = 0.

268. Δίνεται συνάρτηση h(x) = $e^{-x^2}\cdot\int_0^x f(t)dt$, όπου f συνεχής στο [0,1].

i) Να υπολογίσετε την h'(x).

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 ∈ (0,1) ώστε $\int_0^{x_0} f(t)dt=\frac{f(x_0)}{2x_0}$ αν $\int_0^1 f(x)dx=0$.

269. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : [0,1] → R με $\int_0^1 f(x)dx=1$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2\int_0^x f(t)dt=1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (0, 1).

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ∈ (0,1) τέτοιο ώστε $x_0 f(x_0)+\int_0^{x_0} f(x)dx=1$.

270. Έστω f : [0,1] → R μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο συνεχή και ικανοποιεί τη σχέση $2\int_0^1 x^2 f'(x^2)dx=\int_0^1 f(x^2)dx$.Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον x_0 ∈ (0,1) τέτοιο ώστε $f'(\alpha)=2f(a^2)$.

271. Έστω f : R→ R μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει f(x)>0 για κάθε x∈R. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση g : R→ R , η οποία είναι παραγωγίσιμη και έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες x_1,x_2 με $x_1<x_2$.Να δείξετε ότι υπάρχει ξ∈ (x_1,x_2) ,τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $F(x)=\int_0^{g(x)} f(t)dt$ στο σημείο M(ξ,f(ξ)) να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

272. i) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (0,1) τέτοιο ώστε $\int_1^\xi \sqrt{1+t^2}dt+\xi\sqrt{1+\xi^2}=0$.

ii) Αν η f είναι συνεχής στο R με $f(x) \neq 1, x \in R$,να λύσετε την εξίσωση $\int_0^x f(t)dt = x$

273. Έστω f : R→ R μία συνεχής συνάρτηση ,για την οποία ισχύει $(2x-1)\int_2^x f(t)dt \neq (x^2 - x) f(x)$ για κάθε x∈R. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ ∈ (0,1) τέτοιο ώστε $\int_2^{\xi} f(t)dt = 0$.

274. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : [α,β] → R για την οποία ισχύει $\frac{\int_\alpha^\beta f(t)dt}{\beta - \alpha} = \frac{f(a) + f(\beta)}{2}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει θ ∈(α,β) τέτοιο ώστε $\frac{f(\theta) - f(a)}{\theta - \alpha} = f'(\theta)$

275. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f,g : [α,β] → R με f(x)>0,g(x)>0 για κάθε x>0. Να δείξετε ότι υπάρχει θ∈(α,β) τέτοιο ώστε : $\frac{f(\theta)}{\int_a^\theta f(x)dx} - \frac{g(\theta)}{\int_\theta^\beta g(x)dx} = 1$

276. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = 2 + \int_0^x (t-1) f(t) dt$. Αν $f(2) = 0$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της g' η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα χ΄χ σε σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

277. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0$, $0 < \alpha < \beta$.

Αν $g(x) = 2 + \frac{1}{x}\int_a^x f(t)dt, x > 0$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

i) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ii) $g(x_0) = 2 + f(x_0)$.

278. Θεωρούμε τις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f,g, για τις οποίες ισχύει ότι: $f(x) = x - 1 + \int_0^x g(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq -\frac{3}{4}$ για κάθε $x \in [0, 4]$ χωρίς η g να είναι σταθερή στο $[0, 4]$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\rho \in (0, 4)$ τέτοιο, ώστε: $\int_0^\rho g(t)dt = 1 - \rho$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \rho)$ τέτοιο, ώστε $\rho g(\xi) - \int_0^\rho g(t)dt = 0$.

279. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$ με $\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx$. Να αποδείξετε ότι:

i) η f δεν είναι 1-1

ii) υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \int_1^{\frac{1}{\xi}} f(\xi t)dt$.

iii) υπάρχει $\xi_1 \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε $\int_0^{\xi_1} f(t)dt = \frac{3}{2}\int_0^1 f(t)dt$

Θ.Μ.Τ.

280. Έστω η συνάρτηση F(x) = $\int_1^x \sqrt{\ell nt}dt$. Να δείξετε ότι e < F(2e)-F(e) < e$\sqrt{1+\ln 2}$

281. Έστω η συνάρτηση f : [0,1] $\to$ R η οποία είναι συνεχής και η συνάρτηση F(x) = $\int_0^x f(t)dt$.

Αν F(l) < 0 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ $\in$ (0,l) τέτοιο ώστε f (ξ) < 0.

282. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\rho \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi > \rho$ τέτοιο, ώστε: $\int_\rho^x f(t)dt = (x-\rho) f(\xi)$.

283. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια, ώστε: $f(x_1)+f(x_2) = 2\cdot\dfrac{\int_\alpha^\beta f(x)dx}{\beta-\alpha}$

284. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $\int_\alpha^\beta f(t)dt > (\beta-\alpha) f(\alpha)$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$.

ii) $\int_0^{1821} f(t)dt > f(0)+f(1)+...+f(1820)$

285. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[\alpha,\beta]$. Αν $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ να αποδείξετε ότι $F\left(\dfrac{t_1+t_2}{2}\right) \le \dfrac{F(t_1)+F(t_2)}{2}$, $t_1, t_2 \in [\alpha,\beta]$

286. Έστω μια συνεχής συνάρτηση f : [1, 2] $\to$ R με $\int_1^2 f(x)dx > 0$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει γ $\in$ (1, 2) τέτοιο ώστε f (γ) > 0.

ii) Αν f (1) < 0 να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$ (l, 2) τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

iii) Αν f(x) $\neq$ 0 για κάθε x $\in$ [l, 2] να δείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = $\int_1^x f(t)dt$ είναι γνησίως αύξουσα.

287. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = $\int_1^x \dfrac{1}{1+t^2}dt$.

i) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ξ $\in$(1, 2) τέτοιο ώστε $\int_1^2 \dfrac{1+\xi^2}{1+t^2}dt = 1$

288. Έστω f :[0,1] $\to$ R μία συνάρτηση ,η οποία είναι παραγωγίσιμη με f ΄(x) $\neq$0,για κάθε x $\in$ [0,1] και η συνάρτηση $g(x) = \left[\int_0^1 f(x)dx - f(x)\right]\cdot[f(x)-f(0)]$, $x \in [0,1]$.Να αποδείξετε ότι :

i) υπάρχει θ $\in$(0,1) τέτοιο ώστε $\int_0^1 f(x)dx = f(\theta)$

ii) η g ΄ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1)

iii) υπάρχει c $\in$(0,1) τέτοιο ώστε $\int_0^1 f(t)dt = 2f(c) - f(0)$

289. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (0,+∞) με $\int_2^3 f(x)dx = 1$ και $\int_1^2 f(x)dx = 4$, x > 0. Θεωρούμε και τη συνάρτηση φ(x)=$\int_x^{x+1} f(t)dt$, x>0.

i) Να μελετήσετε την φ ως προς την μονοτονία.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(1,2) ώστε f (ξ + 1)-f (ξ) = -3 .

290. Έστω f :R→ R μία συνάρτηση ,η οποία είναι συνεχής .

i) Αν $\int_1^2 f(x)dx = 1$ και $\int_3^4 f(x)dx = 11$,να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈(1,4) τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 5$

ii) Αν $\int_1^e f(x)dx = 3$ και $\int_2^{e^2} f(x)dx = 5$,να δείξετε ότι υπάρχει ξ ∈(1,2) τέτοιο ώστε $f(e^{\xi}) = e^{-\xi}(2 + f(\xi))$

291. i) Έστω η συνάρτηση $g(x) = (x-1)\cdot\int_0^x e^{t^2} dt.$ Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ ∈(0,1) τέτοιο ώστε $\int_0^{\xi} e^{x^2} dx = (1-\xi)e^{\xi^2}$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει θ ∈(0,ξ) τέτοιο ώστε $\int_0^{\xi} e^{t^2} dt = \xi \cdot e^{\theta^2}$

iii) Να αποδείξετε ότι ξ ∈ $\left(\frac{1}{2},1\right)$

292. Έστω η συνεχής συνάρτηση f : [1,2] → R και η συνάρτηση $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

Αν $\int_1^2 xf(x)dx = 0$,να αποδείξετε ότι

i) $\int_1^2 F(x)dx = 2\int_1^2 f(x)dx$

ii) υπάρχει c ∈(1,2) τέτοιο ώστε $\int_1^c f(x)dx = 2\int_2^c f(x)dx$

293. Έστω f : R→ R μία συνάρτηση ,η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι υπάρχει θ∈(0,α) τέτοιο ώστε : $2\int_0^{\theta} f(t)dt = \dfrac{a\cdot\int_0^a f(t)dt}{\theta} - \theta f(\theta)$

294. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,2]$ με $\int_0^2 f(t)dt = 2$. Να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^{\xi} f(t)dt = 2-\xi$.

ii) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,2)$ τέτοια, ώστε $f(\xi_1)f(\xi_2) = 1$.

295. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $\int_0^{2x} f(t)dt = 2xf(x)$ (1) για κάθε $x \ge 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

ii) Η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

Θ.Fermat

296. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f : R→R για την οποία ισχύει $3a^x \ge 3 + 2\int_0^x f(t)dt$, α>0. Να δείξετε ότι f(0) = $\frac{3}{2}$ lnα.

297. Δίνεται συνάρτηση f :R→R συνεχής και $\int_1^x f(t)dt \ge 2006(x^2-1)$ για κάθε x∈R. Να υπολογίσετε το f (1).

298. Αν η γραφική παράσταση της συνεχούς συνάρτησης f : R → R διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει $\int_0^x f(t)dt \ge 2^x + a^x - 3^x - 5^x$ για κάθε x ∈ R, α > 0, να βρείτε το α.

299. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο R για την οποία ισχύει: $\int_{\ln x}^{x^4-x} xf(t)dt + 2x\ln x \ge 2x-2$ για κάθε x >0. Να βρείτε το f(0).

300. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x \frac{\lambda t^2-10t+\lambda}{t^2+4}dt$ να έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0=3$.

301. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(t)=\int_1^t \left(x+x^{2013}+x^{2015}+x^{2017}\right)dt$ δεν έχει σημεία καμπής.

302. Αν η συνάρτηση f : (0, + ∞) → R είναι συνεχής με $\int_1^e f(x)dx = 1+e$ και ισχύει $g(x)=1+x\ell nx-\int_1^x f(t)dt \ge 0$ για κάθε x > 0 να βρείτε το σημείο τομής της C_f με την ευθεία x = e.

303. Έστω μια συνάρτηση f : R → R η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $\int_a^\beta f(x+t)dt \le \int_a^\beta f(x)dx$ για κάθε x ∈R. Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο Μ της C_f με τετμημένη ξ ∈ (α, β) τέτοιο ώστε η εφαπτομένη σ' αυτό να είναι παράλληλη στον άξονα χ'χ .

304. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$, για την οποία ισχύει: $\int_0^x f(t)dt + 2e^x \le xe^x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(0)=-1$.

305. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha,\beta,\gamma>0$. Αν $\int_0^x \left(e^t - \alpha^t \ln\alpha + 2\beta^t \ln\beta + 3\gamma^t \ln\gamma\right)dt \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e\beta^2\gamma^3$.

306. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=1$ και τέτοια, ώστε να ισχύει: $\int_0^x f(t)dt \ge xe^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

307. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_x^{x^3} f(t)dt \ge x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f''(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1,1)$.

308. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι: $\int_{\alpha+x}^{\beta+x} f(t)dt \le \int_\alpha^\beta f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \ne \beta$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

309. Δίνεται συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $\alpha<0<\beta$, για την οποία ισχύει:

$\int_\alpha^\beta f(t)dt \geq \int_\alpha^\beta f(x+t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(\alpha)=f(\beta)$ ii) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

310. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\int_x^{x^2} f(t)dt \leq x^2-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x.

311. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_{-2}^{2} f(x)dx=0$ και

$\int_2^x f(t)dt \leq x^2-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει :

i) $\xi_1\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi_1)=0$ ii) $\xi_2\in(-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=2$.

312. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x (x-t)f(t)dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

313. Έστω μια συνάρτηση f : R→ R η οποία είναι συνεχής και ισχύει $\int_0^x\left(\int_1^t f(u)du\right)dt \geq 1-e^x$ για κάθε x ∈ R. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 1 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 1).

314. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο R και η συνάρτηση h που ορίζεται στο R για την οποία ισχύει: $h(x)=\int_1^{x^2} f(t-1)dt-\int_1^{x^2+1} f(t-1)dt$

i) Να δείξετε ότι η h είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρείτε την h'(x).

ii) Αν η h παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 2$, τότε να δείξετε ότι f (3) = f (4).

315. Έστω f : R→ R μία συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις :

- f ΄(1) <1 και
- $x\cdot\int_1^{x^2} f(xt)dt \leq x^3-x$,για κάθε x∈R.

Να δείξετε ότι :

i) $f(-1)=f(1)=f(0)=1$

ii) υπάρχει α∈(-1,1) ,ώστε $f''(a)=0$.

316. Έστω δύο συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο [α, β] και οι συναρτήσεις F(x) = $\int_a^x f(t)dt$, G(x) = $\int_a^x g(t)dt$ με F(x)>G(x) για κάθε x ∈ (α, β).Το σημείο ξ ∈ (α, β) είναι το σημείο στο οποίο η κατακόρυφη απόσταση (AB), A ∈C_F, B ∈ C_G , παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή. Να δείξετε ότι οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο M με τετμημένη ξ.

Όρια

317. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} &, x<0 \\ 0 &, x=0 \end{cases}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{0} f(x)dx$

318. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} xe^{-x}+a &, x\le 0 \\ x^2\ell nx &, x>0 \end{cases}$

i) Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής.

ii) Για α = 0 να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα. $I=\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

319. Έστω f : R→ R μια συνεχής συνάρτηση με $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=l$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x} f(t)dt$

320. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{2}\int_1^x\left(\sqrt{x-1}\cdot \eta\mu t\right)dt$. Να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της ii) την f ' στο πεδίο ορισμού της iii) το $\lim\limits_{x\to1} f'(x)$

321. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to2}\int_{2x}^{x+2}\left(\eta\mu^7 t+\sigma\upsilon\nu^8 t\right)dt$ ii) $\lim\limits_{x\to0}\int_x^{x+\pi} t\sigma\upsilon\nu \mathrm{tdt}$

322. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(2t+1)dt}{\int_1^x(3t+2)dt}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_2^x 2e^{2t}dt}{\int_1^x 3e^{3t-2}dt}$

323. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x-2}\int_{x+1}^{4x-5}\dfrac{dt}{1+t^2}$ ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\int_0^x\left(\sqrt{1+\eta\mu \mathrm{t}}-1\right)dt$ iii) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}\int_1^x \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi u}{2}du$

iii) $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{\ln(x-1)}\int_1^x\dfrac{dt}{1+t^4}$ v) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^5}\eta\mu^5\left(\sqrt{\mathrm{t}}\right)dt}{x^6}$ vi) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5}{x^5}\int_0^x \eta\mu^4 t dt$

324. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{x}\int_0^x \eta\mu\sqrt{t}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{2-x}\int_x^2\dfrac{\sigma\upsilon\nu\pi t}{t}dt$

325. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu\sqrt{t}dt}{x^3}$ ii) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left(\eta\mu t e^t\right)dt}{x^2}$

326. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+h}\frac{\eta\mu x}{x}\,dx$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}\int_1^x te^{\frac{2}{t}}dt$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^{\chi}\ln t\,dt-1}{\int_0^x te^t dt-1}$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x\left(\sqrt{t}+2\eta\mu t\right)dt\right)$

327. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x xe^{t-x}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x e^{3t+1}dt}{x}$

328. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x te^t dt$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}\eta\mu t dt$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\int_x^{2x} e^t\cdot\ln t dt$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{\eta\mu x}{t}dt$

329. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \eta\mu t\; dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}\int_1^x(\sqrt{t^2+3}-2)\;dt$

iii) $\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x\frac{\ell nt}{(x-1)^2}\;dt$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x\frac{e^t-1}{x^2}\;dt$

330. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και η ευθεία ε: y = 2x - 2 είναι εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x\frac{f(t)}{x^2-2x+1}\;dt$

331. Έστω f : R→ R μια συνεχής συνάρτηση .Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x\frac{f(x+1-t)}{(x-1)(x+1-t)}dt$

332. Έστω f : R→ R μία συνεχής συνάρτηση με f(0)=0 και f ΄(0)=1.Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x\frac{xf(t)}{(e^x-1)\eta\mu x}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x xf(t)dt}{e^x-x-1}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x-t)dt}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ v) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 f(xt)dt$

333. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x \eta\mu x e^{t^2}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \eta\mu t^2 dt}{x\ln x}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} e^{t^2}dt}{(1-e^{-x})\ln x}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x x^5\ln(1+t)dt}{(e^x-x-1)\int_0^{x^3}\eta\mu t^{\frac{2}{3}}dt}$

334. Έστω f : R→ R μία συνάρτηση η οποία είναι συνεχής με f(1)=0.

i) Αν $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\int_1^{1+h}f(t)dt}{h^2}=2$,να βρείτε την f ΄(1).

ii) Αν $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2\int_{1-h}^{1+3h} f(t)dt}{h^2}=2$,να βρείτε την f ΄(1).

335. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{0}^{\frac{1}{x}} xe^{t^2}\,dt$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{0}^{\frac{1}{x}} \dfrac{x}{\ell nt}\,dt$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{0}^{e^x} x\ell n(1+t^2)\,dt$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{0}^{e^{-x}} \dfrac{x}{1+t^2}\,dt$

336. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{2x}\dfrac{dt}{t^2+1}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x^2}\dfrac{dt}{t^3+1}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1}\dfrac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$

iv) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\int_{x+2h}^{x} f(t)dt+2\int_{x}^{x+h} f(t)dt}{h^2}$,αν f παραγωγίσιμη στο R

337. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{x}^{3x}\dfrac{e^t}{t}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 1^-}\int_{x}^{x^2}\dfrac{e^t}{t-1}dt$

iii) $\lim\limits_{x\to 0^-}\int_{x}^{2x} e^{\frac{1}{t}}dt$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{0}^{1}\dfrac{1}{t+1}e^{\frac{t}{x}}dt$

338. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\int_{0}^{x}\eta\mu x e^{t^2}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\ln(1-e^{-x})\int_{0}^{x} e^{t^2}dt$

339. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 1^+}\int_{x}^{x^3}\dfrac{1}{\ln t}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 1^+}\int_{x}^{x^2}\dfrac{t}{\ln t}dt$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}}\dfrac{x}{\ln t}dt$

340. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{x}^{3x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}\int_{x}^{2x}\dfrac{\eta\mu t^2}{t}dt$

341. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{0}^{x}\dfrac{e^t}{t^2+1}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1} e^{t^2}dt$

342. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{0}^{x} e^{t^2}dt$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{0}^{x} e^{t^2-x^2}dt$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_{0}^{x} e^{t^2}dt\right)^2}{\int_{0}^{x} e^{2t^2}dt}$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x^2}\int_{0}^{x} e^{t^2}dt$

343. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1 f(xt)dt$.

344. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to +\infty}\int_0^{\frac{1}{x}}\dfrac{e^{x+1}}{\ln\left(3+t^2\right)}dt$.

345. Να βρείτε τα $\alpha,\beta>0$, για τα οποία ισχύει: $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\eta\mu x-\alpha x}\int_0^x\dfrac{t^2}{t^2+\beta}dt\right]=-2$.

346. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\int_0^x(2t+1)e^t dt, & 0\le x<1\\ \beta^2-3\beta+e+3, & x=1\\ \dfrac{(\alpha-3\beta)\eta\mu(x-1)}{x^2-4x+3}, & 1<x\le 2\end{cases}$, να είναι συνεχής στο $[0,2]$.

347. Δίνεται συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $f(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^3+x^2}=1$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=2$.

348. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\int_1^{3x}\dfrac{e^u}{\sqrt{u}}du$ και $g(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x,t\in(0,+\infty)$. Να υπολογίσετε:

i) Το $g''(1)$

ii) Το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x}g''(x)-\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}-1}$.

349. Δίνεται συνάρτηση g συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g(0)=-1$. Να υπολογίσετε το όριο
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_1^{x^2+1}(1-x)g(t-1)dt}{e^x-x-1}$

350. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f(x)=\dfrac{1}{2x}\int_0^x f(t)dt-\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

351. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση
$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)dt, & x>0\\ f(0), & x=0\end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $x_0=0$.

ii) Να βρείτε την $g'(x)$.

352. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με f' συνεχή στο $[0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\int_0^x\left[2-f(t)\right]dt$ είναι πραγματικός αριθμός, ο οποίος δεν υπερβαίνει το 1.

353. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ με $0<\alpha<\beta$, για την οποία ισχύει ότι $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta}\int_\beta^x \frac{f(x+\beta-t)}{(x-\beta)(x+\beta-t)}dt=1$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$, για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=1$.

354. Δίνεται συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $\int_0^x f(t)dt<f(x)$ (1) για κάθε $x\geq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$.

355. Να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{\ln t}dt=+\infty$.

ii) $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{\eta\mu t}{t}dt=0$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{e^{t^2}}{t^3}dt=+\infty$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{e^t}{t^2+1}dt=+\infty$

vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\int_1^x t^3e^tdt\right)=0$

356. Να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt=+\infty$ και ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_x^{x+1}e^{t^2+x}dt=+\infty$.

357. Να αποδείξετε ότι:

i) $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}t^tdt=0$ και

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}t^tdt=+\infty$.

358. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ με f' γνησίως αύξουσα και $f(0)=f'(0)=0$. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0^+}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt=0$.

359. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=0$, να αποδείξετε ό $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

360. Δίνεται $F(x)=\int_2^x \eta\mu(\pi x)f(t)dt$ με f παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση και f(2)=1.

i) Να βρείτε το F'(x)

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to2}\frac{F'(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

361. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (x) = $\int_2^x\frac{2-\ln t}{t}dt$, x∈ [2,$e^2$].

362. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο f (x) = $\frac{1}{x}\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt$. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της f.

363. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $\int_2^{3x}\frac{3^t-27}{t^3+1}dt$, x∈R.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}}\dfrac{\int_{\frac{2}{3}}^{x} f(u)du}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}$.

Σύνθετα θέματα

364. Να βρείτε συνάρτηση f συνεχή στο $(-1,1)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ και $\eta\mu\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)=x$ για κάθε $x\in(-1,1)$

365. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $\int_1^x f(t)\,dt=x^3-3\lambda x^2+12x-7$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
i) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.
ii) Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

366. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x)=\lambda x+x\int_0^1 f(xt)dt$ για κάθε $\lambda, x\in\mathbb{R}$.
i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\lambda(e^x-1),\ x\in\mathbb{R}$.
iii) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, να βρείτε τη τιμή του λ.

367. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
$2\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^{4-x} f(t)\,dt=x^3+5x^2+6x+\lambda,\ \lambda, x\in\mathbb{R}$.
i) Να αποδείξετε ότι $\lambda=8$
ii) Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$
iii) Να βρείτε τον τύπο της f.

368. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x t(2\ln t+1)\,dt$.
i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε την $f'(x)$.
ii) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.
iii) Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία καμπής της C_f.
iv) Να λύσετε την εξίσωση $\int_{\rho_1}^{\rho_2} x(2\ln x+1)\,dx=\frac{1}{e^3}-e^{x+5}$, όπου ρ_1 η θέση του σημείου καμπής και ρ_2 η θέση τοπικού ακρότατου της f.

369. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και ισχύει $g(x)>\int_0^x g(t)dt$ για κάθε $x\geq 0$, να αποδείξετε ότι:
i) Η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x e^{-x}g(t)\,dt$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

370. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g, παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο, για τις οποίες ισχύουν $f'(x)>0$ και $g'(x)=x^2\int_1^x f'(x^2t)dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $g'(x)=f(x^3)-f(x^2)$.

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi^3)=\dfrac{2f'(\xi^2)}{3\xi}$.

371. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g όπου η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$ με συνεχή παράγωγο στο διάστημα αυτό και $g(x)=\int_0^x(1-t^2)f(t)dt,\ x\in(-1,1)$. Να αποδείξετε ότι:

i) η g είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,1]$.

ii) αν η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1,1)$, τότε η g είναι γνησίως μονότονη.

iii) αν η f είναι άρτια, τότε η G είναι περιττή.

372. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(x)>x\int_{\frac{1}{x}}^{1}f(xt)dt$, $x>1$.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=e^{-x}\int_1^x f(t)dt$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$.

373. Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις f,g, ορισμένες στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $g(\alpha)=g(\beta)$. Αν είναι $g(x)=\int_\alpha^x\dfrac{g^2(t)}{f(t)}dt$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι $g(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

374. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(1+t)}{t}dt,\ x\geq 1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\geq 1$ ισχύει: $\dfrac{\ln^2 x}{2}\leq f(x)\leq \ln 2\ln x+\dfrac{\ln^2 x}{2}$.

iii) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

375. Θεωρούμε την συνάρτηση f που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο [0,1] με f (0) = 0 και $\int_0^1 x^2f''(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx-f(1)$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε οι εφαπτόμενες ευθείες της C_f στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=\xi$ να είναι παράλληλες.

ii) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi_1\in(\xi,1)$ ώστε η $C_{f'}$, να έχει οριζόντια εφαπτομένη στο $x_3=\xi_1$·

iii) Αν ισχύει $\int_{\xi_1}^x f''(t)dt+k(x-\xi_1)\geq 0$, να υπολογίσετε το $\kappa\in$ R.

376. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο [0, e] με f (x) > 0 και g (x) < 0 για κάθε x∈[0,e]. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,e)$ ώστε $\int_0^\xi \xi g(t)dt=\int_e^\xi f(t)dt$

377. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x\cdot y) = f(x)+f(y)$.
i) Να βρείτε την $f'(x)$.
ii) Να βρείτε το τύπο της f αν $f'(1) = 1$.
iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_e^x \frac{f(x)}{\ln t}dt + x - e\ln x = 0$ είναι αδύνατη για $x > e$.

378. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε να ισχύει $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in R$ και $f(0) = 0$.
i) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$
ii) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$.
iii) Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t)dt$ και $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$. Να δείξετε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$.
iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μια λύση στο (0,1).

379. Έστω συνεχής συνάρτηση f: R —> R τέτοια ώστε $f(1) = 1$. Αν για κάθε $x \in R$ ισχύει
$g(x) = \int_1^{x^3} |z|\, f(t)dt - 3\left|z+\frac{1}{z}\right|(x-1) \geq 0$ όπου $z = \alpha + \beta i$, $\alpha,\beta\in R^*$ τότε:
i) Να βρείτε τη g'.
ii) Να δείξετε ότι $|z| = \left|z+\frac{1}{z}\right|$.
iii) Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος (ii) να δείξετε ότι $\mathrm{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$
iv) Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ ώστε $f(x_o)=0$.

380. Έστω μια πραγματική συνάρτηση f ,συνεχής στο R για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :
i) $f(x)\neq 0$, για κάθε $x \in R$
ii) $f(x) = 1 - 2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt$ για κάθε $x \in R$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$ $\forall$ $x \in R$.
i) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$
ii) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή
iii) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
iv) Να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}(xf(x)\eta\mu 2x)$

381. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και για κάθε $x\in (0,l)$ ισχύει :
$f^5(x) + f^3(x) + f(x) = \int_1^x \left(4e^{2t} + 4 - 8et\right)dt$. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο $(x_0,f(x_0))$ με $x_0\in(0,1)$ στο οποίο η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

382. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [α,β] με 0<α<β για την οποία ισχύει $\lim_{x\to a}\int_a^x \frac{f(x+a-t)}{(x-a)(x+a-t)}dt = 2$ και f (β) = 2β. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$ (α,β) έτσι ώστε f '(x_0) = 2.

383. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f : $[1,2] \to R$,για την οποία ισχύει ότι : f(1)=-1 και $\int_1^2 f(x)dx$ Να αποδείξετε ότι :

i) υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$

ii) η εξίσωση $\int_1^x f(t)dt = \frac{2}{3}$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (1,2)

iii) υπάρχει $x_0 \in [1,2]$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) \geq 3$

384. Δίνονται συναρτήσεις f και h παραγωγίσιμες στο R με συνεχή παράγωγο και ισχύουν f '(x)<0 και $h'(x) = 2x\int_1^x f'(2xt)dt$, x∈R.

i) Να δείξετε ότι h'(x) = f($2x^2$)-f(2x).

ii) Να λύσετε την εξίσωση h'(x) = 0.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in$ (0,1) ώστε $2x_0 f'(2x_0^2) = f'(2x_0)$.

385. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $\frac{f'(x)}{e^x} = \int_1^x e^{-t}dt + e^{-x}$ για κάθε x∈R και f(1)=0.

i) Να βρείτε τον τύπο της f.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και την κυρτότητα

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο (l,f (l)).

iv) Να δείξετε ότι $e^{x-1} \geq x$, x∈R .

386. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to \mathrm{Re}(z)} \frac{1}{2x^2+x}\int_{-\frac{1}{2}}^{x}\left(t^2+1\right)\varepsilon\varphi\left(t+\frac{1}{2}\right)dt$ όταν είναι γνωστό ότι $(z+1)^\nu = z^\nu$ με ν∈N-{0,l} και z∈C.

387. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο [0,4] και η συνάρτηση $h(x) = \int_2^x e^t f(t)dt - e^x f(x)$ για x∈ [0,4]. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in(0,4)$ ώστε η C_f να δέχεται εφαπτομένη παράλληλη στον χ΄χ αν ισχύει ότι $\int_0^4 e^t f(t)dt = e^4 f(4) - f(0)$.

388. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = \int_0^x \frac{t}{f(t)}dt + 1$.

i) Να βρείτε το $f(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να βρείτε τον τύπο της f.

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια και ισχύει $\int_{-\alpha}^0 f(x)dx = \int_0^\alpha f(x)dx$.

389. Δίνεται συνάρτηση f, περιττή και συνεχής στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f(x)\int_0^{-x} f(t)dt = x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $g(x) = \int_0^{x} f(t)dt\int_0^{-x} f(t)dt - x^2 + 2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την τιμή της.

ii) $\int_0^{x} f(t)dt\int_0^{-x} f(t)dt = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $\int_0^{\xi} f(t)dt\int_0^{-\xi} f(t)dt = 1 - 2\xi^3$.

390. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{x}{x^2+t^2}dt$ για κάθε $x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ είναι σταθερή και να βρείτε τη τιμή της.

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη.

v) Να αποδείξετε ότι $\frac{x-1}{1+x^2} < f(x) < \frac{x-1}{2}, x > 1$ για κάθε $x \geq 0$.

vi) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις h,για τις οποίες ισχύει ότι $g(x) = 2\int_1^{f(x)} f^{-1}(t)dt$.

391. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) = \int_0^{x} \sqrt{4 + f^2(t)}dt, x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \geq 0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f''(x) = f(x)$,$x \in \mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

iv) Αν ένα υλικό σημείο Μ κινείται επί της γραφικής παράστασης της f και τη χρονική στιγμή κατά την οποία διέρχεται από τον y΄y η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 5m/s, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

392. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $2f(2x) - f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $G(x) = \int_1^{2} f(xt)xdt - x^2 + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,2)$ για τα οποία ισχύει: $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 2$.

iii) Να αποδείξετε ότι η G είναι σταθερή και να βρείτε τη τιμή της.

iv) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I} = \int_1^{4} f(x)dx$.

393. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$f(x) = 1 + \int_{2x+1}^{3x} \frac{f(t-2x)}{x}dt$ για κάθε $x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x + 1$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

iv) Να αποδείξετε ότι $(\beta-\gamma)\left(f(\alpha)-f(\beta)\right)>(\alpha-\beta)\left(f(\beta)-f(\gamma)\right)$ για κάθε $\alpha,\beta,\gamma>0$ με $\alpha<\beta<\gamma$.

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x^3+1\right)=f(3x)$ έχει δύο θετικές ρίζες.

394. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x)=4\int_0^x ue^{-f(u)}du$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(2x^2+1\right)$.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα.

v) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^{2014}}$.

395. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\begin{cases} x\ln x, & x\in(0,1] \\ e^{x-1}-1, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$ και $f(x)=\int_{\frac{1}{2}}^x g(t)\,dt$.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $g'(1)=1$.

iii) Να βρείτε την f.

iv) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

396. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$\int_1^{f(x)} e^u\left(\dfrac{1}{u}+\ln u\right)du=e^{f(x)}\left[x+\ln\left(x^2+1\right)\right]$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho)=4$.

iv) Αν για τη συνεχή συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $g\left(f(x)+x-4\right)=f\left(g(x)\right)+g(x)-4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τη διχοτόμο της 1ης γωνίας των αξόνων σε ένα τουλάχιστον σημείο.

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=5e^2-2e$.

397. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει ότι: η συνάρτηση $g\circ f$ είναι $1-1$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $\int_0^{f(x)} g(t)\,dt+\int_0^x (g\circ f)(t)\,dt=2$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(x)=-1$ για κάθε $x\neq 0$.

ii) $\int_0^{f(x)+x} g(t)\,dt=2$, $x\in\mathbb{R}$.

398. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}^*$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$2+\int_0^x f(u)\,du=\dfrac{1}{g(x)}$ και $2+\int_0^x g(u)\,du=\dfrac{1}{f(x)}$ για κάθε $x\geq 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $f(x)>0$ και $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\geq 0$.

ii) οι συναρτήσεις f,g είναι ίσες.

iii) $f(x)=g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$

399. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x)=\int_{-x}^{x}\dfrac{5t^4}{1+e^{f(t)}}dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

ii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_0^{10} f(x-5)\,dx$.

iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.

iv) Να βρείτε την f.

400. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g,\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $\int_1^x f(t)dt=\int_4^x \phi(u)du$ και $\phi(x)=\int_1^x \dfrac{4g(t)}{g^2(t)+4}dt,\ x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $|f'(x)|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) $|f(\beta)-f(\alpha)|\le|\beta-\alpha|$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

iii) η εξίσωση $\mathrm{f(x)}=4\mathrm{x}$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$

iv) $\int_4^{16} f\left(\dfrac{t}{4}\right)dt=0$.

401. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και έστω $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$. Να αποδείξετε ότι:

i) $g(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,\ x\neq 0$

ii) η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

iii) $x\int_0^{x+1} f(t)\,dt<(x+1)\int_0^x f(t)\,dt$ για κάθε $\mathrm{x}>0$.

iv) αν $\int_0^1 f(t)\,dt=\int_1^2 f(t)\,dt$, τότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε: $\mathrm{g}(\xi)=\mathrm{f}(\xi)$.

402. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\int_x^{x^2}\dfrac{u^2-1}{u^3+u}du,\ x>0$.

i) Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε την $g'(x)$.

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^x \dfrac{u^2-1}{u^3+u}du\le\int_1^{x^2}\dfrac{u^2-1}{u^3+u}du$ για κάθε $x>0$ και να λύσετε την εξίσωση $g(x)=0$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_2^4 \dfrac{x^2-1}{x^3+x}dx<\int_3^9 \dfrac{x^2-1}{x^3+x}dx$

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $\int_\xi^{\xi^2}\dfrac{x^2-1}{x^3+x}dx=2\xi-\xi^2$.

vi) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi_1\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε

$$2\int_{\xi_1}^{\xi_1^2}\frac{x^2-1}{x^3+x}dx=\int_2^4\frac{x^2-1}{x^3+x}dx+\int_3^9\frac{x^2-1}{x^3+x}dx$$

403. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_1^x e^{\frac{1}{t}}dt$, $x>0$.

i) Να αποδείξετε ότι $\int_{e^{-1}}^1 e^{\frac{1}{t}}dt>0$

ii) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{e}<\int_1^2 e^{\frac{1}{t}}dt<e$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^{x+2} f(t)dt>\int_1^{\ln x} f(t)dt$ για κάθε x>3.

iv) Να λύσετε την εξίσωση $\int_1^{e^{2x}} e^{\frac{1}{t}}dt=\int_1^{2-e^x} e^{\frac{1}{t}}dt$

v) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να αποδείξετε ότι $f(x)\le ex-e$ για κάθε $x>0$.

vi) Να αποδείξετε ότι $\int_{x-1}^x e^{\frac{1}{t}}dt>\int_x^{x+1} e^{\frac{1}{t}}dt$

404. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\int_3^x \beta xtdt+15$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $x>0$.

i) Να βρείτε τα α,β για τα οποία ισχύει $f(x)\le f(3)$ για κάθε $x>0$ και η γραφική παράσταση της f περνά από το σημείο $\mathrm{M}(3,-12)$.

ii) Για τις τιμές των α,β του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι:

α) η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο της.

β) ο ρυθμός μεταβολής της f αυξάνεται.

γ) να βρείτε τον τύπο της f.

405. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$f(x)\cdot\int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt=\frac{1}{x}-\alpha$, $0<\alpha<48$, $x>0$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\int_1^x f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt+\alpha x+\frac{\alpha}{x}-5\alpha$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^x f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{x}} f(t)dt=2\alpha-\alpha x-\frac{\alpha}{x^2}$

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο , ώστε: $\int_1^{\xi} f(t)dt\cdot\int_1^{\frac{1}{\xi}} f(t)dt+\xi^5=2\xi^2$.

406. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει: $f(x)=\int_1^x \frac{u+1}{u\left(e^{f(u)}+1\right)}du$

για κάθε $x>0$.

i) Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x,\ x>0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$.

iii) Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $h(x)=f(x)\,f\left(\frac{e^2}{x}\right)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $2\ln\frac{5}{2}>3\ln\frac{7}{5}$.

407. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_3^x \sqrt{u^2-2u}\,du$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

iv) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\int_4^x\left(\int_3^t e^t\sqrt{u^2-2u}\,du\right)dt$ ως προς τη μονοτονία.

v) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν διαφορετικά $\xi_1,\xi_2\in(2,4)$ τέτοια, ώστε

$$e^{\xi_1}f(\xi_1)+e^{\xi_2}f(\xi_2)=\int_2^4 e^t f(t)\,dt$$

vi) Να αποδείξετε ότι $\int_4^x\left(e^{t-4}\dfrac{f(t)}{f(4)}\right)dt\ge x-4$ για κάθε $x>3$.

408. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x\left(\int_1^u f(t)\,dt\right)du+2x^2+3x,\ x\in\mathbb{R}$. Αν $h(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i) $\int_0^1 f(t)\,dt=3$

ii) υπάρχει $\theta\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $\int_0^\theta\left(2f(t)-\dfrac{1}{t+2}\right)dt=2$

iii) υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=10\xi-2$.

409. Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $h(x)=\int_{6-x}^x f(t)\,dt,\ x\in\mathbb{R}$.

i) Να λύσετε την εξίσωση $h''(x)=0$.

ii) Να μελετήσετε την h ως προς τη κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

iii) Να αποδείξετε ότι $2\int_2^4 f(x)\,dx>\int_1^5 f(x)\,dx$.

410. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,+\infty)$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x)>x\int_{\frac{1}{x}}^1 f(xt)\,dt$ για κάθε $x\ge 1$.

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x)=e^{-x}\int_1^x f(t)\,dt,\ x\ge 1$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\ge 1$.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις $\eta\mu^2 x\int_0^x e^{t^2+1}dt+f(x)(\sigma\upsilon\nu x+1)=0$ και $\sigma\upsilon\nu x+1=0$ έχουν τις ίδιες ρίζες.

411. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\dfrac{1}{u^2+1}\,du$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πρόσημο της f.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη κυρτότητα.

iii) Να αποδείξετε ότι $x<f(x)<\dfrac{x}{x^2+1}$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $f(\varepsilon\varphi x)=x$ για κάθε $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και να υπολογίσετε το $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

412. Δίνεται η συνάρτηση $f(u)=\dfrac{\eta\mu^2(ux)}{u^4+x^4}$, $u\in\mathbb{R}$, $x>0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(u)\le\dfrac{1}{x^4}$ για κάθε $u\in\mathbb{R}$ και $x>0$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(u)du=0$.

iii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$.

413. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=f'(0)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x)=\int_0^x\dfrac{f(t)}{t}dt$, $x\ge 0$.

i) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το πρόσημό τους.

ii) Να αποδείξετε ότι η g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{f(t)}{t}dt=+\infty$

iv) Αν $(x-2)f(x)\ge x^3-2x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(2)=4$.

414. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x)=\int_0^x(2t+1)e^{-f(t)}dt$, $x\in\mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}^*$ για το οποίο ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt+\lambda x}{x^3+\lambda^2 x}=0$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\ln 3<\int_0^2\ln\left(x^2+x+1\right)dx-\int_0^1\ln\left(x^2+x+1\right)dx<\ln 7$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\ln\left(t^2+t+1\right)dt$.

415. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, $x>0$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt=0$.

416. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\dfrac{1}{t^2+1}dt$.

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{5}<\int_1^2\dfrac{1}{t^2+1}dt<\dfrac{1}{2}$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$.

iv) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\dfrac{e^x}{t^2+1}dt$