

## Πιθανότητες

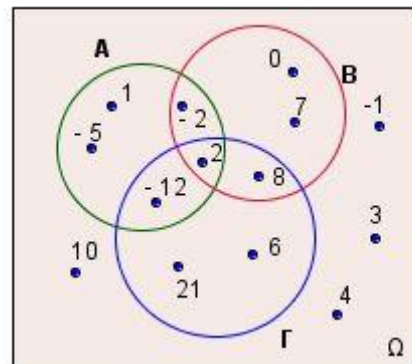
### 2.13096.

α) Αν  $A, B, \Gamma$  είναι τρία ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα, να διατυπώσετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:

- i)  $A \cup B$                       ii)  $B \cap \Gamma$   
iii)  $(A \cap B) \cap \Gamma$             iv)  $A'$

(Μονάδες 12)

β) Στο διπλανό σχήμα παριστάνονται με διάγραμμα Venn ο παραπάνω δειγματικός χώρος και τα τρία ενδεχόμενα  $A, B$  και  $\Gamma$  αυτού. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του (α) ερωτήματος. (Μονάδες 13)



### Λύση

- α) i)  $A \cup B$  = πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$   
ii)  $B \cap \Gamma$  = πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα  $B$  και  $\Gamma$   
iii)  $(A \cap B) \cap \Gamma$  = πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  και  $\Gamma$ .  
iv)  $A'$  = δεν πραγματοποιείται το  $A$

β) Είναι  $\Omega = \{1, -2, 2, -12, -5, 0, 7, 6, -1, 3, 4, 8, 21, 10\}$  με  $N(\Omega) = 14$ ,  $A = \{1, -2, 2, -12, -5\}$  με

$N(A) = 5$ ,  $B = \{-2, 2, 0, 7, 8\}$  με  $N(B) = 5$  και  $\Gamma = \{2, -12, 8, 6, 21\}$  με  $N(\Gamma) = 5$ .

i) Είναι  $A \cup B = \{1, -2, 2, -12, -5, 0, 7, 8\}$  με  $N(A \cup B) = 8$ , άρα  $P(A \cup B) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

ii) Είναι  $B \cap \Gamma = \{2, 8\}$  με  $N(B \cap \Gamma) = 2$  και  $P(B \cap \Gamma) = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$

iii) Είναι  $(A \cap B) \cap \Gamma = \{2\}$  με  $N((A \cap B) \cap \Gamma) = 1$  και  $P((A \cap B) \cap \Gamma) = \frac{1}{14}$

iv)  $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$

### Διάταξη πραγματικών αριθμών

### 2.13152.

Δίνονται οι παραστάσεις  $K = 2\alpha^2 + \beta^2$  και  $\Lambda = 2\alpha\beta$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι  $K \geq \Lambda$  για κάθε τιμή των  $\alpha, \beta$ .

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των  $\alpha, \beta$  ισχύει η ισότητα  $K = \Lambda$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

### Λύση

- α)  $K \geq \Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 \geq 0$  ισχύει αφού  $\alpha^2 \geq 0$  και  $(\alpha - \beta)^2 \geq 0$ .
- β)  $K = \Lambda \Leftrightarrow 2\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$  και  $\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$   
Άρα η ισότητα ισχύει όταν  $\alpha = \beta = 0$ .

### Εξιιώσεις 2ου βαθμού

#### 2.13073.

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις  $(x + 1)$  μέτρα και  $x$  μέτρα.

- α) Να γράψετε με τη βοήθεια του  $x$  την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

- β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)



### Λύση

- α) Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι:  $\Pi = x + x + (x + 1) + (x + 1) = 4x + 2$  m.  
Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:  $E = x(x + 1) = x^2 + x$  m<sup>2</sup>.
- β)  $E = 90 \Leftrightarrow x^2 + x = 90 \Leftrightarrow x^2 + x - 90 = 0$ .  
Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα:  $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-90) = 361$   
και ρίζες  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2} = \frac{-1 \pm 19}{2} \Leftrightarrow x_1 = 9$  και  $x_2 = -10$  απορρίπτεται αφού  $x > 0$   
Επομένως οι διαστάσεις του εργαστηρίου είναι 9 m και 10 m.

#### 2.13153.

Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - \kappa x - 2$ , με  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta > 0$  για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ , όπου  $\Delta$  η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

- β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - \kappa x - 2 = 0$  (1),

- i) να βρείτε το άθροισμα  $S = x_1 + x_2$  και το γινόμενο  $P = x_1 \cdot x_2$  των ριζών της (1).

(Μονάδες 6)

- ii) να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες  $\rho_1, \rho_2$ , όπου  $\rho_1 = 2x_1$  και  $\rho_2 = 2x_2$ .

Μονάδες 9

### Λύση

- α)  $\Delta = \kappa^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = \kappa^2 + 8 > 0$  για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

- β) i) Από τους τύπους Vieta είναι  $S = x_1 + x_2 = -\frac{-\kappa}{1} = \kappa$  και  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-2}{1} = -2$

- ii) Η ζητούμενη εξίσωση έχει άθροισμα ριζών

$$S' = \rho_1 + \rho_2 = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 2\kappa \text{ και γινόμενο ριζών}$$

$$P' = \rho_1 \cdot \rho_2 = 2x_1 \cdot 2x_2 = 4x_1 \cdot x_2 = 4(-2) = -8$$

$$\text{Η εξίσωση είναι η } x^2 - S'x + P' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\kappa x - 8 = 0$$

#### 4.13078.

Δίνεται η εξίσωση  $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1 = 0$  με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τη τιμή του  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να είναι 1ου βαθμού.

(Μονάδες 5)

β) Αν η εξίσωση είναι 2ου βαθμού, να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε αυτή να έχει μια διπλή ρίζα. Για τις τιμές του  $\lambda$  που βρήκατε, να προσδιορίσετε τη διπλή ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

γ) Για τις τιμές του  $\lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα (β), να δείξετε ότι το τριώνυμο  $(8-\lambda)x^2 - 2(\lambda-2)x + 1$  είναι μη αρνητικό, για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ .

(Μονάδες 10)

#### Λύση

α) Η εξίσωση είναι 1ου βαθμού όταν  $8-\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=8$ . Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$-2(8-2)x + 1 = 0 \Leftrightarrow -12x + 1 = 0$$

β) Η εξίσωση είναι 2ου βαθμού όταν  $8-\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 8$ . Τότε έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = [-2(\lambda-2)]^2 - 4 \cdot (8-\lambda) \cdot 1 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - 32 + 4\lambda = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 - 32 + 4\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Delta = 4\lambda^2 - 12\lambda - 16$$

Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα όταν  $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$ .

Η τελευταία είναι εξίσωση 2ου βαθμού ως προς  $\lambda$  με  $\Delta' = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$  και

$$\text{ρίζες } \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow \lambda = 4 \text{ ή } \lambda = -1.$$

Για  $\lambda = 4$  η εξίσωση γίνεται:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Για  $\lambda = -1$  η εξίσωση γίνεται:

$$9x^2 + 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow (3x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$$

γ) Για  $\lambda = 4$  το τριώνυμο γίνεται:  $(8-4)x^2 - 2(4-2)x + 1 = 4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$

και για  $\lambda = -1$  το τριώνυμο γίνεται  $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 \geq 0$

#### Ανισώσεις 1ου βαθμού

#### 4.13082.

Δίνεται το τριώνυμο  $x^2 - (a+1)x + 4 + a$ ,  $a \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:  $\Delta = (a-1)^2 - 16$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $a$  το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν το τριώνυμο έχει ρίζες  $x_1, x_2$ , τότε:

i) Να εκφράσετε το άθροισμα  $S = x_1 + x_2$  και το γινόμενο  $P = x_1 \cdot x_2$  των ριζών του συναρτήσεως του  $a$

(Μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι:  $d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = 4$

(Μονάδες 8)

### Λύση

α) Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = (a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4+a) = a^2 + 2a + 1 - 16 - 4a = a^2 - 2a + 1 - 16 = (a-1)^2 - 16$$

β) Το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές και άνισες όταν  $\Delta > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow$

$$(a-1)^2 > 16 \Leftrightarrow |a-1| > 4 \Leftrightarrow (a-1 < -4 \Leftrightarrow a < -3) \text{ ή } (a-1 > 4 \Leftrightarrow a > 5)$$

γ) i)  $S = x_1 + x_2 = -\frac{-(a+1)}{1} = a+1$  και  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{4+a}{1} = 4+a$

$$\text{ii) } d(x_1, 1) \cdot d(x_2, 1) = |x_1 - 1| |x_2 - 1| = |(x_1 - 1)(x_2 - 1)| = |x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1| \Leftrightarrow$$

$$d(x_1, 1) d(x_2, 1) = |x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1| = |4 + a - (x_1 + x_2) + 1| = |4 + a - (a+1) + 1| \Leftrightarrow$$

$$d(x_1, 1) d(x_2, 1) = |4 + \cancel{a} - \cancel{a} - \cancel{1} + \cancel{1}| = 4$$

### Ανισώσεις 2ου βαθμού

#### 4.13086.

Δίνεται το τριώνυμο  $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

(Μονάδες 9)

β) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  το παραπάνω τριώνυμο έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$ , ώστε  $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(Μονάδες 10)

### Λύση

$$\Delta = (\lambda^2 + 1)^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2$$

α)  $\Delta = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ , άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

β) Το τριώνυμο έχει ρίζες ίσες όταν  $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$ .

γ) Είναι  $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda \leq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  όταν  $\Delta \leq 0$  και  $\lambda < 0$  (το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο, είναι ομόσημο του  $a$ ). Όμως από το (α) σκέλος είναι  $\Delta \geq 0$ , άρα τελικά πρέπει  $\Delta = 0$  και  $\lambda < 0$ . Είναι  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$  και επειδή  $\lambda < 0$ , τελικά είναι  $\lambda = -1$ .

#### 4.13102

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ , με παράμετρο  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι αν  $\lambda = 5$  η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

- β) Να εξετάσετε αν υπάρχει και άλλη τιμή του  $\lambda$ , ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 5)
- δ) Αν  $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1, 5\}$  να δείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει ρίζες. (Μονάδες 10)
- (Μονάδες 5)

### Λύση

Η διακρίνουσα είναι :

$$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4\lambda + 5) = 4\lambda^2 - 16\lambda - 20 = 4(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 4(\lambda + 1)(\lambda - 5)$$

α) Για  $\lambda = 5$  :  $\Delta = 0$  άρα η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα

β)  $\Delta = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1)$  ή  $(\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5)$  .

Επομένως και για  $\lambda = -1$  έχει διπλή ρίζα

γ) Πρέπει  $\Delta > 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 5) > 0 \Leftrightarrow (\lambda < -1)$  ή  $(\lambda > 5) \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$

δ)  $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5 \Leftrightarrow |\lambda^2 - 4\lambda - 5| = -\lambda^2 + 4\lambda + 5 = -(\lambda^2 - 4\lambda - 5)$

πρέπει  $\Delta < 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 5) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-1, 5)$

### 4.13107

Δίνεται το τριώνυμο:  $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα  $\Delta$  του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

(Μονάδες 8)

β) Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα  $S = x_1 + x_2$  συναρτήσει του  $\lambda \neq 0$  και να βρείτε την τιμή του γινομένου  $P = x_1 \cdot x_2$  των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν  $\lambda > 0$  το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Αν  $0 < \lambda \neq 1$  και  $x_1, x_2$ , με  $x_1 < x_2$ , είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να βρείτε το πρόσημο του γινομένου  $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu)$ , όπου  $\kappa, \mu$  είναι αριθμοί τέτοιοι ώστε  $x_1 < \kappa < x_2 < \mu$

(Μονάδες 6)

### Λύση

α)  $\Delta = [-(\lambda^2 + 1)]^2 - 4 \cdot \lambda \cdot \lambda = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ .

Άρα το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

β)  $S = x_1 + x_2 = \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$  και  $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$

γ) Αν  $\lambda > 0$  τότε  $S > 0$  και  $P = 1 > 0$  άρα έχει ρίζες θετικές.

δ) Επειδή  $\lambda > 0$  το τριώνυμο έχει θετικές ρίζες.

Επομένως :  $0 < x_1 < \kappa < x_2 < \mu$  και το πρόσημο του τριωνύμου είναι:

$x$	$-\infty$	$0$	$x_1$	$\kappa$	$x_2$	$\mu$	$+\infty$
$f(x)$		+	○	-	○	+	

Επομένως  $f(0) > 0$ ,  $f(\kappa) < 0$ ,  $f(\mu) > 0$  και  $f(0) \cdot f(\kappa) \cdot f(\mu) < 0$

### Αριθμητική πρόοδος

#### 4.13093

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21 € ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει τη πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης θα πληρώνει 0,5€ περισσότερο από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.  
(Μονάδες 4)

β) Αν για κάθε  $n \leq 51$  ο αριθμός  $a_n$  εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο  $n$ -οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί  $a_1, a_2, \dots, a_{51}$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά  $\omega$  αυτής της προόδου.  
(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51<sup>ος</sup> επιβάτης.  
(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21 € ανά εισιτήριο.

(Δίνεται ότι:  $\sqrt{10201} = 101$ )

(Μονάδες 8)

#### Λύση

α) Ο δεύτερος επιβάτης θα πληρώσει  $3+0,5=3,5\text{€}$   
ο τρίτος επιβάτης θα πληρώσει  $3,5+0,5=4\text{€}$   
ο τέταρτος επιβάτης θα πληρώσει  $4+0,5=4,5\text{€}$

β) Επειδή το ποσό που πληρώνει κάθε επιβάτης είναι κατά 0,5 € περισσότερο από τον προηγούμενο η  $(a_n)$  είναι αριθμητική πρόοδος με  $a_1=3\text{€}$  και διαφορά  $\omega=0,5\text{€}$

γ) Το ποσό που θα πληρώσει ο 51<sup>ος</sup> επιβάτης είναι  $a_{51} = a_1 + 50\omega = 3 + 50 \cdot 0,5 = 28 \text{ €}$

δ) Έστω ότι πρέπει να πουλήσει  $n$  εισιτήρια. Τότε η είσπραξη θα είναι  $\Sigma_n \text{ €}$ .

$$\text{Οπότε : } \Sigma_n > 30 \cdot 21 \Leftrightarrow \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1) \cdot \omega] > 630 \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} \frac{n}{2} \cdot [2 \cdot 3 + (n-1) \cdot 0,5] > 630 \Leftrightarrow$$

$$2n \cdot (6 + 0,5n - 0,5) > 2520 \Leftrightarrow 12n + n^2 - n - 2520 > 0 \Leftrightarrow n^2 + 11n - 2520 > 0 \quad (1)$$

Η διακρίνουσα είναι :  $\Delta = 11^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2520) = 121 + 10080 = 10201$

$$\text{Έχει ρίζες : } n = \frac{-11 + \sqrt{10201}}{2} = \frac{-11 + 101}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ και}$$

$$n = \frac{-11 - \sqrt{10201}}{2} = \frac{-11 - 101}{2} = \frac{-112}{2} = -56$$

Από την (1)  $\Rightarrow (n+45)(n-56) > 0 \Leftrightarrow n-56 > 0 \Leftrightarrow n > 56$

Θα πρέπει να βγάλει τουλάχιστον 57 εισιτήρια που είναι αδύνατον γιατί το

λεωφορείο έχει 51 θέσεις

#### 4.13156

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος  $(a_n)$ , όπου  $n \in \mathbb{N}^*$ . Αν οι τρεις πρώτοι όροι της προόδου είναι:  $a_1 = x$ ,  $a_2 = 2x^2 - 3x - 4$ ,  $a_3 = x^2 - 2$ , όπου  $x \in \mathbb{Z}$ , τότε :

α) να αποδειχθεί ότι  $x = 3$ .

(Μονάδες 10)

β) να βρεθεί ο  $n$ -οστός όρος της προόδου και να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014.

(Μονάδες 8)

γ) να υπολογιστεί το άθροισμα  $S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15}$ .

(Μονάδες 7)

#### Λύση

α) Επειδή  $a_1, a_2, a_3$  διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου :

$$2a_2 = a_1 + a_3 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 3x - 4) = x + x^2 - 2 \Leftrightarrow 4x^2 - 6x - 8 - x - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$\text{Η διακρίνουσα είναι : } \Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

$$\text{Οι ρίζες είναι : } x_1 = \frac{7+11}{2 \cdot 3} = \frac{18}{6} = 3, \quad x_2 = \frac{7-11}{2 \cdot 3} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \text{ απορρίπτεται}$$

Επομένως  $x=3$ .

β)  $a_1=3, a_2=5, a_3=7$  και  $\omega = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$

$$a_n = a_1 + (n-1)\omega = 3 + (n-1) \cdot 2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$$

$$a_n = 2014 \Leftrightarrow 2n + 1 = 2014 \Leftrightarrow 2n = 2013 \text{ άτοπο (άρτιος } \neq \text{ περιττός)}$$

Επομένως δεν υπάρχει όρος της προόδου που να ισούται με 2014

γ)  $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{15} = 3, 7, 11, \dots, 31$

Έστω η αριθμητική πρόοδος  $\beta_n$ , με  $\beta_1 = a_1 = 3$ , ( $\beta_2 = 7$ ) και

$$\omega' = \beta_2 - \beta_1 = a_3 - a_1 = 7 - 3 = 4$$

$$\beta_n = \beta_1 + (n-1)\omega' \Leftrightarrow a_{15} = 3 + (n-1) \cdot 4 \Leftrightarrow 31 = 3 + 4n - 4 \Leftrightarrow 4n = 32 \Leftrightarrow n = 8$$

$$S = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{15} = \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_8 \Leftrightarrow S_8 = \frac{8}{2} \cdot (\beta_1 + \beta_8) \Leftrightarrow$$

$$S_8 = 4 \cdot (3 + 31) \Leftrightarrow S_8 = 4 \cdot 34 = 136$$

Άρα  $S=136$

#### Γεωμετρική Πρόοδος

#### 4.13088.

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στην θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος

της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

(Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της 9ης ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

(Μονάδες 9)

### Λύση

α) Επειδή η επιφάνεια που καλύπτει στη θάλασσα το πετρέλαιο κάθε μέρα είναι διπλάσια από την προηγούμενη ημέρα, οι αριθμοί 3, 6, 12, ... που είναι τα τετραγωνικά που καλύπτει το πετρέλαιο είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με  $a_1 = 3$  και  $\lambda = 2$ .

Στο τέλος της 5ης ημέρας η επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο είναι  $a_5 = a_1 \cdot \lambda^4 = 3 \cdot 2^4 = 48$  τ.μ.

β)  $a_n = 768 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 768 \Leftrightarrow 2^{n-1} = \frac{768}{3} \Leftrightarrow 2^{n-1} = 256 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^8$ , άρα  $n-1=8 \Leftrightarrow n=9$ .

Δηλαδή στο τέλος της 9ης ημέρας το πετρέλαιο θα καλύπτει 768τ.μ.

γ) Οι αριθμοί των τετραγωνικών μέτρων που δηλώνουν την επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο στη θάλασσα από το τέλος της 9ης ημέρας και μετά είναι: 768, 762, 756, ... και αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με  $\beta_1 = 768$  και  $\omega = -6$

Έστω ότι τη  $n$ -οστή ημέρα το πετρέλαιο καλύπτει 12 τ.μ στη θάλασσα. Τότε

$$\beta_n = 12 \Leftrightarrow \beta_1 + (n-1)\omega = 12 \Leftrightarrow 768 - 6(n-1) = 12 \Leftrightarrow 768 - 6n + 6 = 12 \Leftrightarrow$$

$$768 + 6 - 12 = 6n \Leftrightarrow 6n = 762 \Leftrightarrow n = \frac{762}{6} = 127.$$

Δηλαδή σε 127 ημέρες η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

### 4.13092

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες 51200 βακτήρια, και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με  $\beta_n$  το πλήθος των βακτηρίων  $n$  ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ( $n \leq 5$ ).

ι) Να δείξετε ότι η ακολουθία ( $\beta_n$ ) είναι γεωμετρική πρόοδος, και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

- ii) Να εκφράσετε το πλήθος  $\beta_v$  των βακτηρίων συναρτήσει του  $v$ . (Μονάδες 6)
- iii) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης; (Μονάδες 6)
- (Μονάδες 7)

### Λύση

Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε ώρα έχουμε γεωμετρική πρόοδο με  $\alpha_1 = 102400$  βακτήρια και  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

α) Μετά από 6 ώρες θα έχουμε  $\alpha_6 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 102400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 102400 \cdot \frac{1}{32} = 3200$

βακτήρια

- β) i) Μετά από μία ώρα θα έχουμε  $3200 \cdot 3 = 9600$  βακτήρια. Επειδή ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε να τριπλασιάζεται έχουμε γεωμετρική πρόοδο με  $\beta_1 = 9600$  και  $\lambda = 3$
- ii)  $\beta_v = \beta_1 \cdot \lambda^{v-1} = 9600 \cdot 3^{v-1}$
- iii)  $\beta_3 = \beta_1 \cdot \lambda^2 = 9600 \cdot 9 = 86400$  βακτήρια.

### Η έννοια της συνάρτησης

#### 4.13084.

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$ , η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ .

- α) Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa$ ,  $\lambda$ . (Μονάδες 9)
- β) Για  $\kappa = 1$  και  $\lambda = -2$ ,
- i) να απλοποιήσετε τον τύπο της  $g$ . (Μονάδες 9)
- ii) να δείξετε ότι:  $g(\alpha + 3) > g(\alpha)$  όταν  $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ . (Μονάδες 7)

### Λύση

α) Επειδή η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$  και είναι ρητή, οι αριθμοί  $-2$  και  $1$  είναι ρίζες του παρονομαστή. Άρα

$$(-2)^2 + \kappa(-2) + \lambda = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \Leftrightarrow -2\kappa + \lambda = -4 \quad (1) \text{ και}$$

$$1^2 + \kappa \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = -1 \quad (2)$$

Αφαιρώντας από την (1) τη (2), έχουμε:

$$-2\kappa + \lambda - \kappa - \lambda = -4 - (-1) \Leftrightarrow -3\kappa = -4 + 1 \Leftrightarrow -3\kappa = -3 \Leftrightarrow \kappa = \frac{-3}{-3} = 1$$

Από τη (2) για  $\kappa = 1$  έχουμε  $1 + \lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = -2$

β) i) Για  $\kappa = 1$  και  $\lambda = -2$  είναι

$$g(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + x - 2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x+2)}(x-1)} \Leftrightarrow g(x) = (x+1)(x-2)$$

- ii) Είναι  $g(\alpha+3) = (\alpha+3+1)(\alpha+3-2) = (\alpha+4)(\alpha+1)$  και  $g(\alpha) = (\alpha+1)(\alpha-2)$  άρα  
 $g(\alpha+3) > g(\alpha) \Leftrightarrow (\alpha+4)(\alpha+1) > (\alpha+1)(\alpha-2) \Leftrightarrow (\alpha+4)(\alpha+1) - (\alpha+1)(\alpha-2) > 0 \Leftrightarrow$   
 $(\alpha+1)[(\alpha+4) - (\alpha-2)] > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\cancel{\alpha} + 4 - \cancel{\alpha} + 2) > 0 \Leftrightarrow 6(\alpha+1) > 0 \Leftrightarrow$   
 $\alpha+1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$ . Επειδή όμως  $\alpha \neq -2$  και  $\alpha \neq 1$  τελικά είναι  $\alpha \in (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

#### 4.13085.

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2 + \kappa x + \lambda}$ , η οποία έχει πεδίο ορισμού το

$\mathbb{R} - \{-2, 1\}$ .

- α) Να βρείτε τις τιμές των  $\kappa, \lambda$ . (Μονάδες 9)  
 β) Για  $\kappa=1$  και  $\lambda=-2$ ,  
 i) να απλοποιήσετε τον τύπο της  $g$ . (Μονάδες 9)  
 ii) να δείξετε ότι:  $g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0$  όταν  $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$ . (Μονάδες 7)

#### Λύση

- α) Επειδή η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$  και είναι ρητή, οι αριθμοί  $-2$  και  $1$  είναι ρίζες του παρονομαστή. Άρα

$$(-2)^2 + \kappa(-2) + \lambda = 0 \Leftrightarrow 4 - 2\kappa + \lambda = 0 \Leftrightarrow -2\kappa + \lambda = -4 \quad (1) \text{ και}$$

$$1^2 + \kappa \cdot 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \kappa + \lambda = -1 \quad (2)$$

Αφαιρώντας από την (1) τη (2), έχουμε:

$$-2\kappa + \cancel{\lambda} - \kappa - \cancel{\lambda} = -4 - (-1) \Leftrightarrow -3\kappa = -4 + 1 \Leftrightarrow -3\kappa = -3 \Leftrightarrow \kappa = \frac{-3}{-3} = 1$$

Από τη (2) για  $\kappa=1$  έχουμε  $1 + \lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = -2$

- β) i) Για  $\kappa=1$  και  $\lambda=-2$  είναι

$$g(x) = \frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2 + x - 2} = \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-1)}} \Leftrightarrow g(x) = (x+1)(x-2)$$

- ii) Είναι  $g(\alpha) \cdot g(\beta) = (\alpha+1)(\alpha-2)(\beta+1)(\beta-2)$

Επειδή  $\alpha, \beta \in (-1, 1) \cup (1, 2)$ , είναι  $\alpha+1 > 0$ ,  $\alpha-2 < 0$ ,  $\beta+1 > 0$ ,  $\beta-2 < 0$ , οπότε

$$g(\alpha) \cdot g(\beta) > 0.$$

#### Γραφική παράσταση συνάρτησης

#### 4.13090.

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 + 3x + 2$  και  $g(x) = x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)  
 β) Δίνεται η συνάρτηση  $h(x) = x + a$ . Να δείξετε ότι:  
 i) Αν  $a > 1$ , τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, h$  έχουν δύο κοινά

σημεία.

ii) Αν  $a < 1$ , τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, h$  δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

### Λύση

α) Η τετμημένη του κοινού σημείου βρίσκεται από την εξίσωση  $f(x) = g(x)$ .

$$\text{Είναι } f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$ . Τότε  $f(-1) = g(-1) = 0$ , άρα κοινό σημείο είναι το  $M(-1, 0)$ .

β) Για τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f, h$  έχουμε:

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = x + a \Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 - a = 0 \quad (1).$$

Η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2 - a) = 4 - 8 + 4a = 4a - 4 = 4(a - 1)$$

i) Αν  $a > 1$ , τότε  $\Delta > 0$  και η (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, h$  έχουν δύο κοινά σημεία.

ii) Αν  $a < 1$ , τότε  $\Delta < 0$  και η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, h$  δεν έχουν κοινά σημεία.

## Η συνάρτηση $y = ax + \beta$

### 4.13155

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 4x + 2$  και  $g(x) = 4x^2 - 9$  με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  με τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία  $(3, 0)$  και  $(-3, 0)$ .

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g$  δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση  $h$  της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το  $A(0, 3)$  και τέμνει τη γραφική παράσταση της  $g$  σε σημείο του ημιάξονα  $Ox$ .

(Μονάδες 7)

### Λύση

α) Για να βρούμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x'x$  λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = -2 \Leftrightarrow \frac{4x}{4} = -\frac{2}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Άρα το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x'x$

είναι το σημείο  $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$

β) Τα σημεία (3,0) και (-3,0) ανήκουν στον άξονα  $x'x$ . Από το α) ερώτημα η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον  $x'x$  μόνο στο σημείο Β.  
Άρα δεν τέμνει τους άξονες (τον  $x'x$ ) σε κάποιο από τα σημεία (3, 0) και (-3, 0).

γ) Η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον  $y'y$  στο σημείο Γ(0,2)  
Η γραφική παράσταση της  $g$  τέμνει τον  $y'y$  στο σημείο Δ(0,-9)

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{4} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$

Άρα τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον άξονα  $x'x$  είναι τα σημεία  $E\left(\frac{3}{2}, 0\right), Z\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ .

Επομένως τα κοινά σημεία των συναρτήσεων  $f$  και  $g$  δεν βρίσκονται πάνω στους άξονες

δ) Έστω  $h(x) = ax + \beta$ .

Επειδή η γραφική παράσταση της  $h$  διέρχεται από το σημείο Α έχουμε :

$$3 = a \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 3$$

Επειδή η γραφική παράσταση της  $h$  τέμνει τη γραφική παράσταση της  $g$  σε σημείο του ημιάξονα  $Ox$ , δηλαδή στο σημείο  $E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ , ισχύει ότι:

$$0 = a \cdot \frac{3}{2} + \beta \Leftrightarrow 0 = a \cdot \frac{3}{2} + 3 \Leftrightarrow 3a + 6 = 0 \Leftrightarrow 3a = -6 \Leftrightarrow a = -2$$

Επομένως  $h(x) = -2x + 3$ .

#### 4.13158.

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για  $x$  μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση  $K(x) = 12,5x + 120$  και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από τη συνάρτηση  $E(x) = 15,5x$ .

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός 12,5 και τι ο αριθμός 15,5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση)

(Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

#### Λύση

α) Τα πάγια έξοδα της επιχείρησης είναι  $K(0) = 120$  ευρώ, γιατί πρόκειται για το κόστος της εταιρείας τους χωρίς καθόλου παραγωγή.

β) Επειδή τα πάγια έξοδα είναι 120 ευρώ και από την παραγωγή  $x$  μπλουζάκια, το κόστος είναι  $12,5x$ , ο αριθμός 12,5 εκφράζει το πόσο κοστίζει ένα μπλουζάκι. Αντίστοιχα επειδή τα έσοδα από τη πώληση  $x$  τεμαχίων, η είσπραξη είναι  $15,5x$ , το 15,5 είναι η είσπραξη από τη πώληση μιας μπλούζας, άρα το 15,5 εκφράζει το πόσο που πουλιέται ένα μπλουζάκι.

γ)  $K(x) = E(x) \Leftrightarrow 12,5x + 120 = 15,5x \Leftrightarrow 3x = 120 \Leftrightarrow x = 40$  μπλουζάκια  
Άρα πρέπει να πουλήσουν 40 μπλουζάκια για να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση.

δ) Αν  $A(x)$  η συνάρτηση του κέρδους τότε  
 $A(x) = E(x) - K(x) = 15,5x - 12,5x - 120 = 3x - 120$   
 $A(60) = 3 \cdot 60 - 120 = 180 - 120 = 60$  ευρώ  
Θα έχει κέρδος 60 ευρώ.