# ΤΕΣΤ ❶
# ΣΤΙΣ ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), να αποδείξετε ότι $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$ ,όπου ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

**(20 μονάδες)**

**Β)** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α)** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των κάθετων πλευρών ισούται με τον λόγο των προβολών τους στην υποτείνουσα.

**β)** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης στην υποτείνουσα.

**γ)** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ,τότε η γωνία $\hat{A} = 90^\circ$.

**δ)** Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί σε μία πλευρά του είναι ίσο με τα $\frac{3}{4}$ του τετραγώνου της πλευράς του.

**(10 μονάδες)**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6,ΑΓ=8 και ΒΓ=10 .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. **(10 μονάδες)**

**β)** Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ΚΓ της ΑΓ στην ΒΓ **(10 μονάδες)**

**γ)** Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΚ. **(10 μονάδες)**

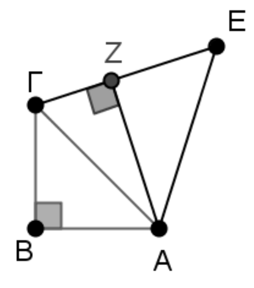
**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και $B\Gamma < A\Gamma = 2\sqrt{2}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = 90^\circ$. **(10 μονάδες)**

**β)** Να αποδείξετε ότι $(B\Gamma) = (AB) = 2$ . **(10 μονάδες)**

**γ)** Με βάση την ΑΓ σχηματίζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΓΕΑ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ΑΖ το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στη ΓΕ ,να αποδείξετε ότι :
$A\Gamma^2 + \Gamma E^2 + AE^2 = 3AZ^2 + 2EZ^2 + \Gamma Z^2$ .




**(20 μονάδες)**

**Λύσεις**

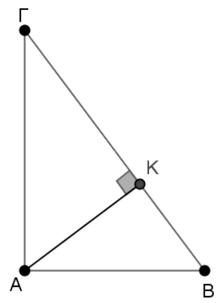
## ΘΕΜΑ 1ο

**Α)** Θεωρία

**Β) ΛΣΛΣ**

## ΘΕΜΑ 2ο

**α)** Αρκεί $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow 10^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow 100 = 36 + 64 \Leftrightarrow 100 = 100$.
Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία Α.




**β)** $A\Gamma^2 = K\Gamma \cdot B\Gamma \Leftrightarrow 64 = K\Gamma \cdot 10 \Leftrightarrow K\Gamma = 6,4$ **.**

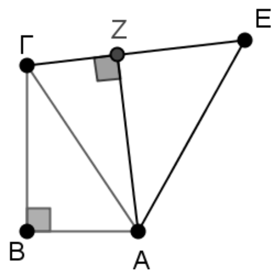
**γ)** $BK = B\Gamma - K\Gamma = 10 - 6,4 = 3,6$ **.**
$AK^2 = K\Gamma \cdot BK \Leftrightarrow AK^2 = 6,4 \cdot 3,6 = 23,04 \Leftrightarrow AK = \sqrt{23,04} = 4,8$ **.**

## ΘΕΜΑ 3ο

**α)** $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ οπότε η πλευρά ΑΒ δεν μπορεί να είναι η υποτείνουσα..
$B\Gamma < A\Gamma$ άρα η υποτείνουσα είναι η ΑΓ και ορθή η γωνία Β.

**β)** $\hat{B} = 90^\circ - \hat{\Gamma} = 45^\circ = \hat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και ΑΒ=ΒΓ.
Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ
$AB^2 + B\Gamma^2 = A\Gamma^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2AB^2 = 8 \Leftrightarrow AB^2 = 4 \Leftrightarrow AB = 2 = B\Gamma$ **.**

**γ)** Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΖ,ΑΖΕ έχουμε αντίστοιχα:
$A\Gamma^2 = AZ^2 + \Gamma Z^2$ (1) ,
$AE^2 = AZ^2 + EZ^2 \Leftrightarrow 2AE^2 = 2AZ^2 + 2EZ^2$ (2).
$(1) + (2) \Rightarrow A\Gamma^2 + 2AE^2 = 3AZ^2 + 2EZ^2 + \Gamma Z^2 \overset{AE=E\Gamma}{\Leftrightarrow}$
$A\Gamma^2 + \Gamma E^2 + AE^2 = 3AZ^2 + 2EZ^2 + \Gamma Z^2$.



# <u>ΤΕΣΤ ❷</u>
# <u>ΣΤΙΣ ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ</u>

**ΘΕΜΑ 1ο**

**Α)** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), να αποδείξετε ότι $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$,όπου ΒΔ η προβολή της ΑΒ στην ΒΓ

**(20 μονάδες)**

**Β)** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

**α)** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών ισούται με τον λόγο των τετραγώνων των προβολών τους στην υποτείνουσα.

**β)** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

**γ)** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ,τότε η γωνία $\hat{B} = 90^\circ$.

**δ)** Σε κάθε ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της υποτείνουσας είναι ίσο με το διπλάσιο του τετραγώνου μίας κάθετης πλευράς του.

**(10 μονάδες)**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=3,ΑΓ=4 και ΒΓ=5 .

**α)** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. **(10 μονάδες)**

**β)** Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής ΚΓ της ΑΓ στην ΒΓ **(10 μονάδες)**

**γ)** Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΚ. **(10 μονάδες)**

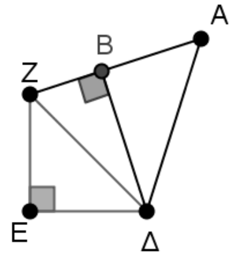
**ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ με $\hat{\Delta} = 45^\circ$ και $EZ < \Delta Z = \sqrt{2}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι $\hat{E} = 90^\circ$ . **(10 μονάδες)**

**β)** Να αποδείξετε ότι $(EZ) = (\Delta E) = 1$ . **(10 μονάδες)**

**γ)** Με βάση την ΔΖ σχηματίζουμε ισοσκελές τρίγωνο ΔΑΖ , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ΔΒ το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στη ΑΖ ,να αποδείξετε ότι :
$\Delta Z^2 + AZ^2 + A\Delta^2 = 3B\Delta^2 + 2AB^2 + BZ^2$ .




**(20 μονάδες)**

## Λύσεις

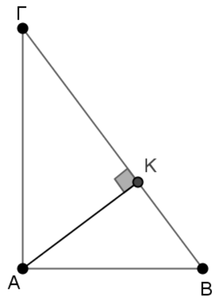
### ΘΕΜΑ 1ο

**Α)** Θεωρία

**Β)** ΣΣΛΣ

### ΘΕΜΑ 2ο

**α)** Αρκεί $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \Leftrightarrow 5^2 = 3^2 + 4^2 \Leftrightarrow 25 = 9 + 16 \Leftrightarrow 25 = 25$.
Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή την γωνία Α.




**β)** $A\Gamma^2 = K\Gamma \cdot B\Gamma \Leftrightarrow 16 = K\Gamma \cdot 5 \Leftrightarrow K\Gamma = 3,2$.

**γ)** $BK = B\Gamma - K\Gamma = 5 - 3,2 = 1,8$
$AK^2 = K\Gamma \cdot BK \Leftrightarrow AK^2 = 3,2 \cdot 1,8 = 5,76 \Leftrightarrow AK = \sqrt{5,76} = 2,4$.

### ΘΕΜΑ 3ο

**α)** $\hat{\Delta} = 45^\circ$ οπότε η πλευρά ΕΖ δεν μπορεί να είναι η υποτείνουσα..
$EZ < \Delta Z$ άρα η υποτείνουσα είναι η ΔΖ και ορθή η γωνία Ε.

**β)** $\hat{Z} = 90^\circ - \hat{\Delta} = 45^\circ = \hat{\Delta}$ οπότε το τρίγωνο ΖΕΔ είναι ισοσκελές και ΕΔ=ΕΖ.
Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΔΕΖ έχουμε :
$\Delta E^2 + EZ^2 = Z\Delta^2 \Leftrightarrow 2\Delta E^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\Delta E^2 = 2 \Leftrightarrow \Delta E^2 = 1 \Leftrightarrow \Delta E = 1 = EZ$.

**γ)** Σύμφωνα με το πυθαγόρειο θεώρημα στα ορθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ,ΑΒΔ έχουμε αντίστοιχα:
$Z\Delta^2 = ZB^2 + B\Delta^2$ (1) ,
$A\Delta^2 = AB^2 + B\Delta^2 \Leftrightarrow 2A\Delta^2 = 2AB^2 + 2B\Delta^2$ (2).
$(1) + (2) \Rightarrow Z\Delta^2 + 2A\Delta^2 = 3B\Delta^2 + 2AB^2 + ZB^2 \overset{AZ = A\Delta}{\Leftrightarrow}$
$\Delta Z^2 + AZ^2 + A\Delta^2 = 3B\Delta^2 + 2AB^2 + BZ^2$.