ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 29 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

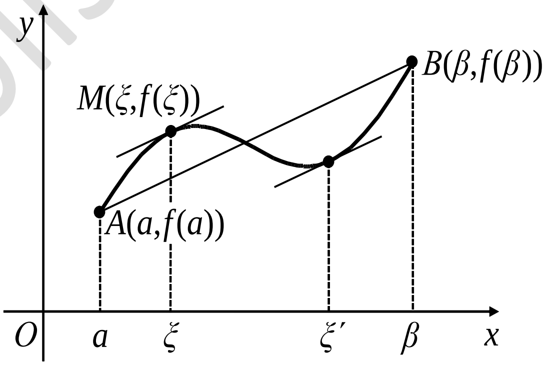
Β. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.



Γ. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $w=3z-i\bar{z}+4=3(\alpha+\beta i)-i(\alpha-\beta i)+4=3\alpha+3\beta i-\alpha i-\beta+4=(3\alpha-\beta+4)+(3\beta-\alpha)i$

Οπότε $Re(w)=3\alpha-\beta+4$, $Im(w)=3\beta-\alpha$.

Β. Οι εικόνες Μ του w έχουν συντεταγμένες $(3\alpha-\beta+4,3\beta-\alpha),\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Επειδή κινούνται στην ευθεία $y=x-12$, ισχύει :

$3\beta-\alpha=3\alpha-\beta+4-12 \Leftrightarrow 4\beta=4\alpha-8 \Leftrightarrow \beta=\alpha-2$

Αν $N(\alpha,\beta)$ οι εικόνες του μιγαδικού z, τότε οι συντεταγμένες του Ν επαληθεύουν την εξίσωση $y=x-2$.

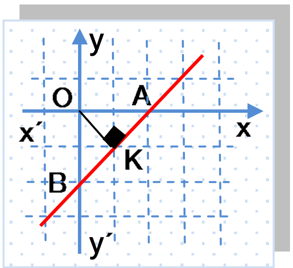
Οπότε οι εικόνες Ν των μιγαδικών z κινούνται στην ευθεία ε: $y=x-2$.

γ. Η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,-2)$ αντίστοιχα.

Επειδή $(OA)=(OB)=2$, το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές οπότε το ύψος του ΟΚ είναι και διάμεσος. Άρα το Κ είναι μέσο του ΑΒ και έχει συντεταγμένες (1,1), γιατί :

$$x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=1 \text{ και } y_K=\frac{y_A+y_B}{2}=-1.$$

Επειδή η εικόνα Ν του μιγαδικού z κινείται επί της ε, και το πιο κοντινό σημείο της ε στην αρχή των αξόνων είναι το $K(1,-1)$,ο μιγαδικός z που έχει το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το Κ, οπότε $z=1-i$.



ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και 1-1 οπότε ορίζεται η αντίστροφή της.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=20x^3+6x=2x\cdot\left(10x^2+3\right)$.

Για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0$ και f κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<0$ και f κοίλη στο $(-\infty,0]$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x-1-x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=e^x-1$.

$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$

Για κάθε $x<0$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow(-\infty,0]$ και για κάθε $x>0$ είναι

$g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[0,+\infty)$

Η g έχει ολικό ελάχιστο το g(0)=0. Άρα $g(x)\geq g(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δηλαδή $e^x-x-1\geq 0\Leftrightarrow e^x\geq x+1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(e^x\right)\geq f(x+1)$.

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο (0,0) είναι :

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-0=1\cdot x\Leftrightarrow y=x$ η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.

δ. $f^{-1}(x)\geq 0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f\left(f^{-1}(x)\right)\geq f(0)\Leftrightarrow x\geq 0$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι : $E=\int_0^3 f^{-1}(x)dx$.

Θέτουμε $f^{-1}(x)=u$, τότε x=f(u) και $dx=f'(u)du$.

Για x=0 είναι $f(u)=0=f(0)\Leftrightarrow u=0$ και για x=3 είναι $f(u)=3\Leftrightarrow f(u)=f(1)\Leftrightarrow u=1$.

$$E=\int_0^1 uf'(u)du=\left[uf(u)\right]_0^1-\int_0^1 f(u)du=f(1)-\int_0^1\left(u^5+u^3+u\right)du\Leftrightarrow$$

$$E=3-\left[\frac{u^6}{6}+\frac{u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_0^1=3-\frac{11}{12}=\frac{25}{12}.$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Αν $\gamma=\delta$ τότε από τη σχέση $f(\gamma)f(\delta)<0$ έχουμε $f^2(\gamma)<0$ που είναι αδύνατο.

Άρα $\gamma\neq\delta$. Έστω $\gamma<\delta$.

Η συνάρτηση f είναι στο $[\gamma,\delta]$ και $f(\gamma)f(\delta)<0$ άρα λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(\gamma,\delta)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0)=0$.

β) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta]$, οπότε υπάρχουν $x_1\in(\alpha,x_0)$ και $x_2\in(x_0,\beta)$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=0=f'(x_2)$ (1).

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\alpha,\gamma]$ υπάρχει $x_3\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_3)=\frac{f(\gamma)-f(\alpha)}{\gamma-\alpha}=\frac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha}.$$

Επειδή $f(\gamma)f(\delta)<0$ οι τιμές $f(\gamma)$, $f(\delta)$ είναι ετερόσημες. Έστω $f(\gamma)<0$ και $f(\delta)>0$ τότε $f'(x_3)<0$. Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\gamma,x_0]$ υπάρχει $x_4\in(\gamma,x_0)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_4)=\frac{f(x_0)-f(\gamma)}{x_0-\gamma}=\frac{-f(\gamma)}{x_0-\gamma}>0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[x_0,\delta]$ υπάρχει $x_5\in(x_0,\delta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_5)=\frac{f(\delta)-f(x_0)}{\delta-x_0}=\frac{f(\delta)}{\delta-x_0}>0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f στο $[\delta,\beta]$ υπάρχει $x_6\in(\delta,\beta)$ τέτοιο, ώστε :

$$f'(x_6)=\frac{f(\beta)-f(\delta)}{\beta-\delta}=\frac{-f(\delta)}{\beta-\delta}<0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_3,x_4]$ υπάρχει $\xi_2\in(x_3,x_4)$ τέτοιο, ώστε :

$$f''(\xi_2)=\frac{f'(x_4)-f'(x_3)}{x_4-x_3}>0.$$

Λόγω Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_5,x_6]$ υπάρχει $\xi_1\in(x_5,x_6)$ τέτοιο, ώστε :

$$f''(\xi_1)=\frac{f'(x_6)-f'(x_5)}{x_6-x_5}<0.$$

γ) Επειδή $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)<0$ και η f'' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$, λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f''(\xi)=0$. Επομένως η f έχει τουλάχιστον ένα ***πιθανό*** σημείο καμπής.