Επαναληπτικά Διαγωνίσματα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου από το Askisopolis 2025 - 2026

Αντώνης Βαλέργας **Γαβριήλ Ελευθερίου**
Αποστόλης Κακαβάς **Νίκος Κουμάντος**
Στέλιος Μιχαήλογλου **Άγγελος Μπλιάς**
Θανάσης Νικολόπουλος **Βαγγέλης Ραμαντάνης**
Δημήτρης Πατσιμάς **Νίκος Σαμπάνης**
Βαγγέλης Τόλης **Νίκος Τούντας** **Ισαάκ Χιονίδης**

7ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου
από την ομάδα του Ασκησόπολις
Διάρκεια: 3 ώρες
Ύλη: 2ο Γενικό Επαναληπτικό

Θέμα Α

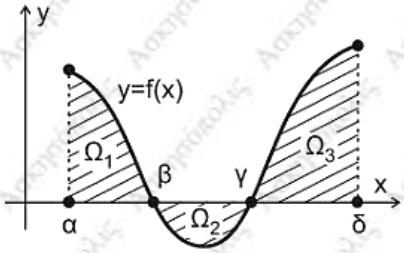
Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

7 μονάδες

Α2. Έστω οι συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

4 μονάδες

Α3. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.
Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι
$E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$,
τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με:



α) 6 **β)** – 4 **γ)** 4 **δ)** 0 **ε)** 2

4 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

β) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$.

γ) Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \text{ εφόσον } \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

δ) Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$ και συνεχής στο $(\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει πάντοτε στο $[\alpha, \beta]$ μία μέγιστη τιμή.

ε) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & , x < 1 \\ x^3 - \beta x - 1 & , x \geq 1 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 1$.

5 μονάδες

Β2. Υλικό σημείο Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του τη χρονική στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

4 μονάδες

Β3. Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu x + 1) < f(x + 1)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

6 μονάδες

Β4. Να βρείτε ένα διάστημα της μορφής $[\alpha,\beta]$ στο οποίο να ισχύει το θεώρημα Rolle για την f.

4 μονάδες

Β5. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=2$ και $x=4$.

6 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha x(\beta\ln x-1)+1,\ x>0$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, η οποία έχει τοπικό ακρότατο για $x=1$ το 0.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x(\ln x-1)+1,\ x>0$.

4 μονάδες

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

6 μονάδες

Γ3. α) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η οποία άγεται από το σημείο $K(0,-1)$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\Lambda(1,-1)$.

5 + 5 = 10 μονάδες

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $f^{2026}(x)+x-1=\ln x$.

5 μονάδες

Θέμα Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2f(x)\le x^5-2x^3+x^2+x$ για κάθε $x\ne 0$
- $\int_1^2(5x^4+1)e^{x^2f(x)+2x^3-x^2}dx=e^2(e^{32}-1)$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3-2x+\frac{1}{x}+1$, $[1,2]$.

5 μονάδες

Έστω $f(x)=x^3-2x+\frac{1}{x}+1$, $x\ne 0$

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

6 μονάδες

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=|\lambda|$, όπου $-1<\lambda<1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $\rho_1<\rho_2$. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $-2<\rho_1<-1<\rho_2<0$.

2 + 3 = 5 μονάδες

Για τα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι ρ_1 και λ είναι αυτά του Δ3 ερωτήματος.

Δ4. Έστω μία συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε η $g\circ f$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x=\rho_1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει κρίσιμο σημείο το $x_0=|\lambda|$.

5 μονάδες

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x)-f\left(\frac{1}{\rho_1}+1\right)=1-f\left(|\lambda|-\rho_1^3+2\rho_1\right)$.

4 μονάδες

Κάθε επιτυχία!

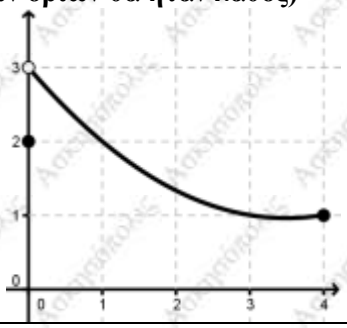
Λύσεις

Θέμα Α

Α1.	Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Στο $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ .	**1**
	Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.	**3**
	Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε x στο εσωτερικό του Δ είναι $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, άρα έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ.	**3**

Α2.	Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$.	**2**
	Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A / f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.	**2**

Α3.	**Σωστή είναι η απάντηση γ).**	**4**
	Αιτιολόγηση (Δεν απαιτείται στις απαντήσεις των μαθητών): $E(\Omega_1) = \int_\alpha^\beta \lvert f(x)\rvert dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, άρα $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 2$. $E(\Omega_2) = \int_\beta^\gamma \lvert f(x)\rvert dx = -\int_\beta^\gamma f(x)dx$ αφού $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\beta, \gamma]$, άρα $\int_\beta^\gamma f(x)dx = -1$. $E(\Omega_3) = \int_\gamma^\delta \lvert f(x)\rvert dx = \int_\gamma^\delta f(x)dx$ αφού $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\gamma, \delta]$, άρα $\int_\gamma^\delta f(x)dx = 3$. Άρα $\int_\alpha^\delta f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\delta f(x)dx = 2 - 1 + 3 = 4$.	

Α4.	**α)** Σωστό **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό	**10**
	Αιτιολόγηση (Δεν απαιτείται στις απαντήσεις των μαθητών): **α)** Ορισμός **β)** Ενδέχεται κάποιο από τα πλευρικά όρια να μην ορίζεται. Για παράδειγμα έστω $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Τότε είναι $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ και το $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ δεν είναι καλώς ορισμένο, αφού η f δεν ορίζεται για αρνητικές τιμές του x. **γ)** Ιδιότητα ορίων. **(Σχόλιο: Αν δεν γνωρίζαμε την ύπαρξη των ορίων θα ήταν λάθος)** **δ)** Έστω η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Ορίζεται στο $[0,4]$ είναι συνεχής στο $(0,4]$ και δεν παίρνει μέγιστη τιμή στο $[0,4]$. **Σχόλιο:** Αν ήταν συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε θα από ΘΜΕΤ θα είχε και μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. **ε)** Έστω ότι μία μη συνεχής συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη. Τότε αφού είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής, πράγμα άτοπο. 	

Θέμα Β

Β1.	Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 1 είναι και συνεχής σε αυτό, οπότε $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\left(x^2+\alpha\right)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(x^3-\beta x-1\right)=1-\beta-1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1+\alpha=-\beta\Leftrightarrow \alpha=-\beta-1\ \ (1)$.	**2**
	Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 1 ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\Leftrightarrow$	**1**
	$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+\alpha-(-\beta)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-\beta x-1+\beta}{x-1}\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^3-\beta x-1+\beta}{x-1}\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)-\beta(x-1)}{x-1}\Leftrightarrow$ $2=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\cancel{(x-1)}\left[\left(x^2+x+1\right)-\beta\right]}{\cancel{x-1}}\Leftrightarrow 2=3-\beta\Leftrightarrow\beta=1$ και από την $(1)\Rightarrow\alpha=-2$	**2**

Β2.	Έστω $M\left(x(t),y(t)\right)$, όπου $y(t)=f\left(x(t)\right)$. Επειδή η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec, είναι $x'(t)=1$.	**1**
	Έστω $t=t_0$ η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $A(1,-1)$, τότε $x(t_0)=1$ και $y(t_0)=-1$.	**1**
	Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του M είναι $y'(t)=\left[f\left(x(t)\right)\right]'=f'\left(x(t)\right)\cdot x'(t)$ και τη χρονική στιγμή t_0: $y'(t_0)=f'\left(x(t_0)\right)\cdot x'(t_0)=f'(1)\cdot1=2$ cm/sec γιατί από Β1 ερώτημα $f'(1)=2$.	**2**

Β3.	Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x+1>1$ και $x+1>1$.	**1**
	Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $f'(x)=3x^2-1>0$ για κάθε $x>1$ άρα $f\nearrow(1,+\infty)$. (Πράγματι είναι $x>1\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow 3x^2>3\Leftrightarrow 3x^2-1>2\Leftrightarrow f'(x)>2>0$)	**2**
	Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(\eta\mu x+1)<f(x+1)\ \overset{f\nearrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}\ \eta\mu x+1<x+1\Leftrightarrow\eta\mu x<x$ ισχύει	**2**
	γιατί $\lvert\eta\mu x\rvert\le\lvert x\rvert$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$, άρα για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ είναι $\eta\mu x<x$.	**1**

Β4.	Αφού f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε αρκεί να βρούμε $\alpha<\beta$ τέτοια ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$.	**1**
	<u>1ος τρόπος:</u> (Αυθαίρετη επιλογή τιμής στον έναν κλάδο και απαίτηση ισότητας στον άλλον κλάδο)	
	Είναι $f(2)=8-2-1=5$ και για $x<1$ είναι $f(x)=5\Leftrightarrow x^2-2=5\Leftrightarrow x^2=7\Leftrightarrow x=-\sqrt{7}$.	
	Είναι $f\left(-\sqrt{7}\right)=f(2)$ και η f είναι συνεχής στο $\left[-\sqrt{7},2\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(-\sqrt{7},2\right)$, οπότε στο διάστημα $\left[-\sqrt{7},2\right]$ εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle.	**4**
	<u>2ος τρόπος:</u> (Με επίλυση εξίσωσης)	

	Λύνουμε την εξίσωση $x^2-2=x^3-x-1 \Leftrightarrow x^3-x^2-x+1=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)-(x-1)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-1)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.	
	Είναι $f(-1)=(-1)^2-2=-1$ και $f(1)=-1$. Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και $f(-1)=f(1)$ άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f στο $[-1,1]$.	4

Β5.	Το ζητούμενο εμβαδό είναι το $E(\Omega)=\int_2^4 \lvert f(x)\rvert dx$	1
	Για κάθε $2\le x\le 4 \overset{f\nearrow[1,+\infty)}{\Leftrightarrow} f(2)\le f(x)\le f(4) \Leftrightarrow 5\le f(x)\le 59$, άρα $f(x)>0$ για $x\in[2,4]$.	2
	Άρα $E(\Omega)=\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4(x^3-x-1)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x\right]_2^4=64-8-4-(4-2-2)=52$.	3

Θέμα Γ

Γ1.	Η $f(x)=\alpha x(\beta\ln x-1)+1$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $$f'(x)=\left[\alpha x(\beta\ln x-1)+1\right]'=\alpha(\beta\ln x-1)+\alpha x\cdot\frac{\beta}{x}=\alpha(\beta\ln x+\beta-1)$$	1
	Επειδή παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x=1$ το 0, τότε $f(1)=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \alpha\cdot 1\cdot(\beta\ln 1-1)+1=0 \Leftrightarrow -\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha=1$	1
	Η f έχει τοπικό ακρότατο στο εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $x=1$, είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό άρα από το θεώρημα Fermat είναι: $f'(1)=0 \Leftrightarrow$	1
	$\Leftrightarrow \alpha(\beta\ln 1+\beta-1)=0 \overset{\alpha=1}{\Leftrightarrow} \beta-1=0 \Leftrightarrow \beta=1$. Συνεπώς $f(x)=x(\ln x-1)+1,\ x>0$.	1

Γ2.	Η f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x$ και $f''(x)=\frac{1}{x}$.	1
	Η f είναι συνεχής στο $(0,1]$ και $f'(x)<0$ στο $(0,1)$ άρα $f\searrow(0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ άρα $f\nearrow[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=0$.	3
	Επιπλέον $f''(x)=\frac{1}{x}>0$ για $x>0$, και f συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα $f\cup(0,+\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.	2

Γ3. α)	Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης (ε) με τη γραφική παράσταση της f. Τότε, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon: y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.	1
	Η ε διέρχεται από το σημείο $K(0,-1)$ άρα ισχύει: $-1-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(0-x_0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1-x_0(\ln x_0-1)-1=-x_0\ln x_0 \Leftrightarrow \cancel{-x_0\ln x_0}-2+x_0=\cancel{-x_0\ln x_0} \Leftrightarrow x_0=2$	2
	Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη έχει εξίσωση: $(\varepsilon): y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y-2(\ln 2-1)-1=\ln 2\cdot(x-2) \Leftrightarrow y\cancel{-2\ln 2}+2-1=\ln 2\cdot x\cancel{-2\ln 2} \Leftrightarrow y=\ln 2\cdot x-1$	2

Γ3. β)	Έστω $N(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης (η) με τη γραφική παράσταση της f. Τότε, η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\eta: y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.	1

	Η εφαπτομένη η διέρχεται από το σημείο $\Lambda(1,-1)$, άρα ισχύει: $-1-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(1-x_0)\Leftrightarrow -1-x_0(\ln x_0-1)-1=\ln x_0(1-x_0)\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cancel{-x_0\ln x_0}-2+x_0=\ln x_0\cancel{-x_0\ln x_0}\Leftrightarrow x_0-\ln x_0-2=0.$	
	Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x-\ln x-2,\ x>0.$ Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.	1
	Είναι: $g'(x)\geq 0\Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}\geq 0\Leftrightarrow \frac{x-1}{x}\geq 0\Leftrightarrow x(x-1)\geq 0\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\geq 1$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $g(1)=1-\ln 1-2=-1<0.$	1
	Η g συνεχής και είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, άρα έχει σε αυτό σύνολο τιμών το $g((0,1])=\left[g(1),\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\right)=[-1,+\infty)$. Το $0\in g((0,1])=[-1,+\infty)$ άρα υπάρχει $\rho_1\in(0,1]$ τέτοιο ώστε $g(\rho_1)=0$ και μάλιστα μοναδικό, αφού g γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.	1
	Η g συνεχής και είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$, άρα έχει σε αυτό σύνολο τιμών το $g((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to 1}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-1,+\infty)$. Το $0\in g((1,+\infty))=(-1,+\infty)$ άρα υπάρχει $\rho_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $g(\rho_2)=0$ και μάλιστα μοναδικό, αφού g γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.	1
	Συνεπώς η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $(0,+\infty)$, άρα υπάρχουν ακριβώς δύο λύσεις για το x_0, δηλαδή ακριβώς δύο σημεία της C_f από τα οποία μπορούμε να φέρουμε ευθείες εφαπτόμενες στη C_f που να διέρχονται από το σημείο $\Lambda(1,-1)$.	

Γ4.	Για $x>0$ είναι: $f^{2026}(x)+x-1=\ln x\Leftrightarrow f^{2026}(x)=\ln x-x+1$.	
	Από το ερώτημα **(β)** γνωρίζουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=0$, άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\geq 0\Leftrightarrow f^{2026}(x)\geq 0$, με το "=" να ισχύει μόνο για $x=1$.	2
	Επίσης γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x\leq x-1\Leftrightarrow \ln x-x+1\leq 0$, με το "=" να ισχύει μόνο για $x=1$.	2
	Άρα η ισότητα $f^{2026}(x)=\ln x-x+1$ ισχύει μόνο όταν $\begin{cases}f^{2026}(x)=0\\ \ln x-x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$	1

Θέμα Δ

Δ1.	Για κάθε $x\neq 0$ είναι $x^2f(x)\leq x^5-2x^3+x^2+x\Leftrightarrow x^2f(x)+2x^3-x^2\leq x^5+x\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow e^{x^2f(x)+2x^3-x^2}\leq e^{x^5+x}\overset{5x^4+1>0}{\Leftrightarrow}(5x^4+1)e^{x^2f(x)+2x^3-x^2}\leq(5x^4+1)e^{x^5+x}$.	1
	Έστω ότι η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[1,2]$. Τότε θα είναι $\int_1^2(5x^4+1)e^{x^2f(x)+2x^3-x^2}dx<\int_1^2(5x^4+1)e^{x^5+x}dx$ (1)	1
	Έστω $I=\int_1^2(5x^4+1)e^{x^5+x}dx$. Θέτουμε $x^5+x=\omega$ τότε $(5x^4+1)dx=d\omega$. Για $x=1$ είναι $\omega=2$ ενώ για $x=2$ είναι $\omega=34$. Άρα $I=\int_2^{34}e^{\omega}d\omega=e^{34}-e^2$.	2

	Η σχέση (1) γίνεται $e^2\left(e^{32}-1\right)<e^{34}-e^2 \Leftrightarrow e^{34}-e^2<e^{34}-e^2$ που είναι άτοπο.	
	Άρα η ισότητα ισχύει για κάθε $x\in[1,2]$ και είναι: $$x^2f(x)=x^5-2x^3+x^2+x \Leftrightarrow f(x)=x^3-2x+\frac{1}{x}+1,\ x\in[1,2].$$	1

Δ2.	Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=3x^2-2-\frac{1}{x^2}=\frac{3x^4-2x^2-1}{x^2}$.	1
	$3x^4-2x^2-1\le 0 \overset{x^2=\omega\ge 0}{\Leftrightarrow} 3\omega^2-2\omega-1\le 0 -\frac{1}{3}\le\omega\le 1 \overset{\omega\ge 0}{\Leftrightarrow} \omega\le 1 \Leftrightarrow x^2\le 1 \Leftrightarrow |x|\le 1 \Leftrightarrow -1\le x\le 1$.	1
	Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ και $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-1)$ άρα $f\nearrow(-\infty,-1]$. Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ και $f'(x)<0$ στο $(-1,0)$ άρα $f\searrow[-1,0)$. Η f είναι συνεχής στο $(0,1]$ και $f'(x)<0$ στο $(0,1)$ άρα $f\searrow(0,1]$. Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ και $f'(x)>0$ στο $(1,+\infty)$ άρα $f\nearrow[1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=1$ και τοπικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1$. x: $-\infty$, -1, 0, 1, $+\infty$ $3x^4-2x^2-1$: $+$, 0, $-$, $-$, 0, $+$ x^2: $+$, $+$, 0, $+$, $+$ $f'(x)$: $+$, 0, $-$, $-$, 0, $+$ f: $\nearrow$, T.M., $\searrow$, $\searrow$, T.E., $\nearrow$	2
	Έστω $A_1=(-\infty,-1]$, $A_2=(-1,0)$, $A_3=(0,1)$ και $A_4=[1,+\infty)$. • Η f συνεχής και $\nearrow$ στο A_1 άρα: $f(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(-1)\right]=(-\infty,1]$ • Η f συνεχής και $\searrow$ στο A_2 άρα: $f(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to 0^-}f(x),\lim\limits_{x\to -1^+}\right)=(-\infty,1)$ • Η f συνεχής και > στο A_3 άρα: $f(A_3)=\left(\lim\limits_{x\to 1^-}f(x),\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\right)=(1,+\infty)$ • Η f συνεχής και $\nearrow$ στο A_4 άρα: $f(A_4)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$ Είναι $f(\mathbb{R}^*)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)\cup f(A_4)=\mathbb{R}$.	2

Δ3.	Είναι $-1<\lambda<1 \Leftrightarrow |\lambda|<1$. Παρατηρούμε ότι $|\lambda|\in f(A_1)$, $|\lambda|\in f(A_2)$ και η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1, A_2 άρα η εξίσωση $f(x)=|\lambda|$ έχει μοναδική ρίζα σε καθένα από τα A_1, A_2. Επίσης $|\lambda|\notin f(A_1)$, $|\lambda|\notin f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x)=|\lambda|$ δεν έχει ρίζες στα A_3, A_4. Δηλαδή είναι $\rho_1\in A_1$ και $\rho_2\in A_2$ οι μοναδικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=|\lambda|$.	2
	Θεωρούμε την συνάρτηση $k(x)=f(x)-|\lambda|$, $x\in[-2,-1]$. Είναι $k(-2)=f(-2)-|\lambda|=-8+4-\frac{1}{2}+1-|\lambda|=-\frac{7}{2}-|\lambda|<0$ και $k(-1)=f(-1)-|\lambda|=1-|\lambda|>0$ άρα $k(-2)k(-1)<0$. Η k είναι συνεχής στο $[-2,-1]$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $k(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=|\lambda|$ έχει ρίζα στο $(-2,-1)$.	2
	Επειδή οι ρ_1,ρ_2 είναι οι μοναδικές ρίζες τότε $\rho_1\in(-2,-1)\subseteq A_1$ και $\rho_2\in(-1,0)=A_2$. Άρα είναι $-2<\rho_1<-1<\rho_2<0$.	1

Δ4.	Η $g\circ f$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο για $x=\rho_1$ το $g\left(f\left(\rho_1\right)\right)$. Επίσης η $g\circ f$ ορίζεται όταν $\begin{cases} x\in D_f \\ f\left(x\right)\in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ f\left(x\right)\in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x\neq 0$, δηλαδή $D_{g\circ f}=\mathbb{R}^*$.	**1**
	• Αν η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f\left(\rho_1\right)$ τότε θα έχει κρίσιμο σημείο το $f\left(\rho_1\right)=\left\|\lambda\right\|$ (από Δ3).	**1**
	• Αν η g είναι παραγωγίσιμη στο $f\left(\rho_1\right)$, τότε επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο ρ_1 θα είναι και η $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο ρ_1. Επειδή το ρ_1 είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $\left(g\circ f\right)'\left(\rho_1\right)=0 \Leftrightarrow g'\left(f\left(\rho_1\right)\right)f'\left(\rho_1\right)=0 \Leftrightarrow g'\left(f\left(\rho_1\right)\right)=0$ αφού από το Δ1 ερώτημα η $f'\left(x\right)=0$ έχει μοναδικές ρίζες τις $x_1=-1$ και $x_2=1$ άρα $f'\left(\rho_1\right)\neq 0$. Επομένως η g θα έχει κρίσιμο σημείο το $f\left(\rho_1\right)=\left\|\lambda\right\|$ (από Δ3).	**3**

Δ5.	Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $e^x\neq 0$.	
	Από Δ3 ερώτημα είναι $f\left(\rho_1\right)=\left\|\lambda\right\| \Leftrightarrow \rho_1^3-2\rho_1+\frac{1}{\rho_1}+1=\left\|\lambda\right\| \Leftrightarrow \frac{1}{\rho_1}+1=\left\|\lambda\right\|-\rho_1^3+2\rho_1$ άρα θα είναι $f\left(\frac{1}{\rho_1}+1\right)=f\left(\left\|\lambda\right\|-\rho_1^3+2\rho_1\right)$ επομένως: $f\left(e^x\right)-\cancel{f\left(\frac{1}{\rho_1}+1\right)}=1-\cancel{f\left(\left\|\lambda\right\|-\rho_1^3+2\rho_1\right)} \Leftrightarrow f\left(e^x\right)=1 \Leftrightarrow f\left(e^x\right)=f\left(1\right)$	**2**
	Από Δ3 είναι $f\left(x\right)\geq f\left(1\right)$ για κάθε $x>0$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=1$. Επειδή $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f\left(e^x\right)\geq f\left(1\right)$ με την ισότητα να ισχύει για $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$. Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=0$.	**2**