Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis
2021 - 2022

Αντώνης Βαλέργας
Αποστόλης Κακαβάς
Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας

13ο Διαγώνισμα

25-5-2022

Θέμα Α

Α1. α) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

μονάδες 3+4

Α2. Πότε το σημείο $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σύνολο Α και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Α ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε η ιδιότητα $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$, ισχύει μόνο εφόσον $\alpha<\gamma<\beta$.

β) Ισχύει: $\int_0^{2\pi}\eta\mu x dx=0$.

γ) Η σύνθεση δύο περιττών συναρτήσεων f,g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, εφόσον ορίζεται, είναι άρτια συνάρτηση.

μονάδες 6

Α5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις.

Α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$, όταν

α) η f είναι συνεχής στο x_0

β) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$

γ) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq 0$

δ) f παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0)=0$

ε) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ ή $-\infty$

Β. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-x\right)=2$, τότε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ είναι ίσο με

α. 0 **β.** -2 **γ.** 3 **δ.** -1 **ε.** 2

μονάδες 4

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x-2\sqrt{x}+1,\ x\geq 0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $(g\circ g)(x)=x$ για κάθε $x\in[0,1]$.

μονάδες 5

Β2. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη g ως προς τη κυρτότητα και στη συνέχεια να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες.

μονάδες 5

Β4. Με βάση τα ερωτήματα β, γ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g.

μονάδες 4

Β5. Να λύσετε στο $[0,1]$ την εξίσωση $g\left(g\left(g\left(g(\eta\mu x)\right)\right)\right)=g\left(g(x)\right)$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η ευθεία ε: $y=\sqrt{3}x$, η συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ και η συνάρτηση $\rho:[-1,0]\to\mathbb{R}$ με

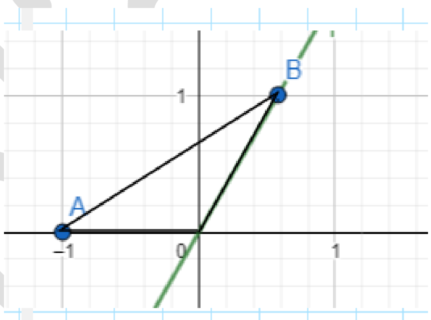
$$\rho(x)=-\frac{3(-x)^{\frac{5}{3}}}{5}-\sqrt{3}\frac{x^2}{2}.$$

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης ρ.

μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες ε , $x=-1$ και του άξονα $y'y$.

μονάδες 5



Γ3. Ένα κινητό Β κινείται πάνω στην ημιευθεία $y=\sqrt{3}x$ με $x>0$ και $x'(t)=2\sqrt{3}$ cm/sec.

Έστω Α(-1,0) και Ο(0,0) , $\theta=\widehat{BAO}$ και t_0 είναι η χρονική στιγμή όπου ΟΒ=ΟΑ.

α) Να δείξετε ότι $\theta(t_0)=\frac{\pi}{6}$ και $x(t_0)=\frac{1}{2}$.

μονάδες 7

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ τη χρονική στιγμή όπου ΟΒ=ΟΑ.

μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{f(x)-1}-f(x)}{x^2}=2$
- $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
- $\int_{f(0)}^{f(1)}\left(f''(x)\right)^2=0$ για κάθε $x<0$.
- η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο 0 είναι αμβλεία.

Να δείξετε ότι

Δ1. $f(0)=1$.

μονάδες 5

Δ2. $f'(0)=-2$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της (ε) .

μονάδες 5

Δ3. υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

μονάδες 5

Δ4. η f έχει μοναδικό ελάχιστο.

μονάδες 5

Δ5. $\int_1^3 f(x)dx>2$

μονάδες 5

Ευχόμαστε Επιτυχία!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. α) Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε: $\left(x^{-\nu}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^{\nu}}\right)' = \dfrac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \dfrac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}$.

β) Είναι $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^{u}$. Επομένως,

$y' = \left(e^{u}\right)' = e^{u} \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \dfrac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \dfrac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$, τότε

το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Α3. α) Ψευδής

β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $A = \mathbb{R}^*$ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, όμως $f(x) < 0$ για κάθε $x < 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, δηλαδή η f δεν διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}^*$.

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ

Α5.Α δ Β. ε

Θέμα Β

Β1. Είναι $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x} - 1\right)^2$.

Για να ορίζεται η $g \circ g$ πρέπει: $\begin{cases} x \in A_g \\ g(x) \in A_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 0$.

Είναι $(g \circ g)(x) = g\left(g(x)\right) = \left(\sqrt{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2} - 1\right)^2 = \left(\left|\sqrt{x} - 1\right| - 1\right)^2$.

Όταν $x \in [0,1]$ είναι $\sqrt{x} - 1 \leq 0$, οπότε: $(g \circ g)(x) = \left(-\sqrt{x} + \cancel{1} - \cancel{1}\right)^2 = x$

Β2. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}$.

$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$. Για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $g'(x) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$. Για κάθε $x > 1$ είναι $g'(x) > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Είναι $g(0) = 1$, $g(1) = 0$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = +\infty$.

Στο διάστημα $\Delta_1 = [0,1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_1) = [g(1), g(0)] = [0,1]$. Στο διάστημα $\Delta_2 = (1,+\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $g(\Delta_2) = \left(\lim\limits_{x\to 1^+} g(x), \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)\right) = (0,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της g είναι το $g(A) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = [0,+\infty)$.

Β3. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g''(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(1 - x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Είναι $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

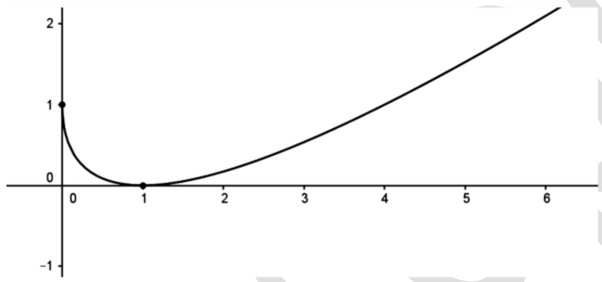
Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 = +\infty$ η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right) = 1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} (g(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cancel{x} - 2\sqrt{x} + 1 - \cancel{x}\right) = -\infty$, άρα η g δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Β4.



Β5. Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $g(g(x)) = x$, άρα:

$$g\left(g\left(\underbrace{g(g(\eta\mu x))}_{\eta\mu x}\right)\right) = \underbrace{g(g(x))}_{x} \Leftrightarrow \underbrace{g(g(\eta\mu x))}_{\eta\mu x} = x \Leftrightarrow \eta\mu x = x \Leftrightarrow x = 0 \text{ γιατί}$$

$|\eta\mu x| \le |x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Θέμα Γ

Γ1. Για κάθε $x \in (-1,0)$ είναι $\rho'(x) = (-\frac{3(-x)^{\frac{5}{3}}}{5} - \sqrt{3}\frac{x^2}{2})' = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{3}x > 0$.

Επειδή η ρ είναι συνεχής είναι γνησίως αύξουσα στο [-1,0] , οπότε έχει ελάχιστο το ρ(-1)= $-\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ και μέγιστο το ρ(0)=0.

Γ2. Έστω $h(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt{3}x$ με πεδίο ορισμού το [-1,0].

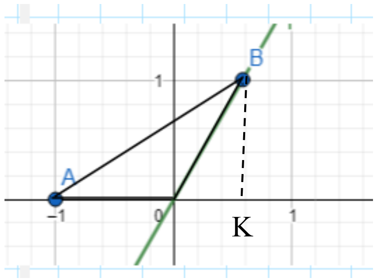
Για κάθε $x \in [-1,0]$ είναι $\sqrt[3]{x^2} \ge 0, -\sqrt{3}x \ge 0$, οπότε $h(x) \ge 0$ με την ισότητα να ισχύει για x=0.

1ος τρόπος: Το εμβαδόν τότε είναι

$$E = \int_{-1}^{0} |h(x)| dx = \int_{-1}^{0} (\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{3}x) dx = \int_{-1}^{0} ((-x)^{\frac{2}{3}} - \sqrt{3}x) dx = [-\frac{3(-x)^{\frac{5}{3}}}{5} - \sqrt{3}\frac{x^2}{2}]_{-1}^{0} = \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ τ.μ}$$

2ος τρόπος: $E=\int_{-1}^{0}|h(x)|dx=\int_{-1}^{0}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{3}x)dx=\int_{-1}^{0}\rho'(x)dx=[\rho(x)]_{-1}^{0}=\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ τ.μ.

Γ3. α) Είναι $B(x,\sqrt{3}\,x)$ με x >0, το ΟΑ=1, ΟΒ=$\sqrt{x^2+(\sqrt{3}x)^2}=2x$ και τότε ΑΒ=$\sqrt{(x+1)^2+3x^2}=\sqrt{4x^2+2x+1}$.



Επειδή η ευθεία $y=\sqrt{3}x$, έχει συντελεστή διεύθυνσης $\sqrt{3}$ θα σχηματίζει με τον x΄x άξονα γωνία $\frac{\pi}{3}$rad. Όταν όμως ΟΑ=ΟΒ τότε οι γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ είναι ίσες και η καθεμία το μισό της εξωτερικής γωνίας δηλαδή $\frac{\pi}{6}$rad. Ακόμη τότε ΟΑ=ΟΒ$\Leftrightarrow 1=2x \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x(t_0)=\frac{1}{2}$

β) 1ος τρόπος

Έστω Κ η προβολή του Β στον x΄x. Τότε το Γ έχει συντεταγμένες (x,0).

Στο τρίγωνο ΑΒΚ είναι $\text{συν}\theta=\frac{AK}{AB}=\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$

2ος τρόπος

Από νόμο συνημίτονων θα έχουμε $OB^2=OA^2+AB^2-2OA\cdot AB\cdot\text{συν}\theta\Leftrightarrow$

$4x^2=1+4x^2+2x+1-2\sqrt{4x^2+2x+1}.\text{συν}\theta \Leftrightarrow \text{συν}\theta=\frac{x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}}$.

Άρα $\text{συν}\theta(t)=\frac{x(t)+1}{\sqrt{4x^2(t)+2x(t)+1}}$ οπότε

$$-\text{ημ}\theta(t)\cdot\theta'(t)=\left(\frac{\sqrt{4x^2(t)+2x(t)+1}-\frac{(x(t)+1)(4x(t)+1)}{\sqrt{4x^2(t)+2x(t)+1}}}{4x^2(t)+2x(t)+1}\right)x'(t)\Leftrightarrow$$

$$-\text{ημ}\theta(t)\cdot\theta'(t)=\left(\frac{4x^2(t)+2x(t)+1-(x(t)+1)(4x(t)+1)}{(4x^2(t)+2x(t)+1)\sqrt{4x^2(t)+2x(t)+1}}\right)x'(t)\Leftrightarrow$$

$$-\text{ημ}\theta(t)\cdot\theta'(t)=\left(\frac{-3x(t)}{(4x^2(t)+2x(t)+1)\sqrt{4x^2(t)+2x(t)+1}}\right)x'(t)$$ και για t το t_0 θα είναι

$-\text{ημ}\theta(t_0)\cdot\theta'(t_0)=(\frac{-\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}})2\sqrt{3}\Leftrightarrow\text{ημ}\theta(t_0)\cdot\theta'(t_0)=1$ όμως $\text{ημ}\theta(t_0)=\text{ημ}\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ άρα $\theta'(t_0)=2rad/sec$

Θέμα Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{e^{f(x)-1}-f(x)}{x^2}, x\neq 0\Leftrightarrow e^{f(x)-1}-f(x)=g(x)\cdot x^2$. Υπάρχουν τα όρια στο 0 γιατί $e^{f(x)-1}-f(x)$ και $g(x)\cdot x^2$ είναι συνεχής στο 0, οπότε

$\lim_{x\to 0}\left(e^{f(x)-1}-f(x)\right)=\lim_{x\to 0}\left(g(x)\cdot x^2\right)\Leftrightarrow e^{f(0)-1}-f(0)=0$ (1).

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^x\geq x+1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για x = 0. Για $x=f(0)-1$ είναι $e^{f(0)-1}\geq f(0)-1+1\Leftrightarrow e^{f(0)-1}-f(0)\geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $f(0)-1=0\Leftrightarrow f(0)=1$, άρα από την (1) προκύπτει ότι $f(0)=1$

Δ2. Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο 0 είναι αμβλεία οπότε $f'(0)<0$.

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)-1}-f(x)}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f'(x)\cdot e^{f(x)-1}-f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{2}f'(x)\cdot\dfrac{e^{f(x)-1}-1}{f(x)-1}\cdot\dfrac{f(x)-1}{x}\right)\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)-1}-f(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}\left(f'(0)\right)^2\Leftrightarrow2=\dfrac{1}{2}\left(f'(0)\right)^2\Leftrightarrow\left(f'(0)\right)^2=4\overset{f'(0)<0}{\Leftrightarrow}f'(0)=-2$, γιατί

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)-1}-1}{f(x)-1}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{f(x)-1}f'(x)}{f'(x)}=e^{f(0)-1}=1$ και $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-1}{x}=f'(0)$

Η (ε) έχει εξίσωση $y-f(0)=f'(0)\cdot x\Leftrightarrow y=-2x+1$.

Δ3. Είναι $f''(x)\neq0$ οπότε $\left(f''(x)\right)^2>0$.

Αν $f(0)>f(1)$ τότε $\int_{f(0)}^{f(1)}\left(f''(x)\right)^2dx=-\int_{f(1)}^{f(0)}\left(f''(x)\right)^2dx<0$ άτοπο.

Όμοια αν $f(0)<f(1)$ τότε $\int_{f(0)}^{f(1)}\left(f''(x)\right)^2dx>0$ άτοπο.

Άρα $f(0)=f(1)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ οπότε ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle άρα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=0$.

Επίσης η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ αφού δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$.

Έστω $f''(x)<0$ τότε f' γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Όμως $\xi>0\overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow}f'(0)>f'(\xi)\Leftrightarrow-2>0$ άτοπο άρα $f''(x)>0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Δ4. Είναι $f'(x)\geq0\Leftrightarrow f'(x)\geq f'(\xi)\overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow}x\geq\xi$.

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ για $x>\xi$, $f'(x)<0$ για $x<\xi$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\xi]$ οπότε παρουσιάζει ελάχιστο στο ξ το $f(\xi)$, το οποίο είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Δ5. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\xi,+\infty)$, για κάθε $x\geq1>\xi$ είναι

$f(x)>f(1)=1\Rightarrow\int_1^3f(x)dx>\int_1^3dx=2$