2ο Επαναληπτικό διαγώνισμα στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου 2017-18

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$. Στη συνέχεια να γίνει γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

β) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f(\beta)>0$,τότε $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο (α,β), τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$.

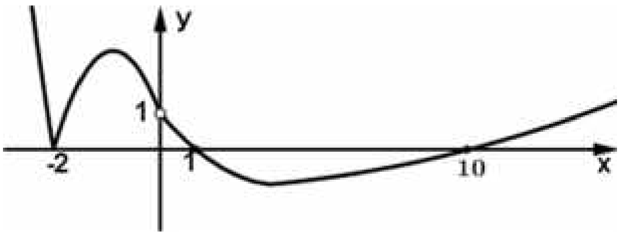
δ) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, $\alpha\neq\beta$, η f είναι συνεχής και δεν είναι η μηδενική συνάρτηση, τότε η f έχει ετερόσημες τιμές.

ε) Αν για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f'(x)\neq 0$ για κάθε x που ανήκει σε ένα διάστημα Δ, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

μονάδες 5x2

Θέμα Β

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)-x^3}{x}$ της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Β1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{|g(x)|}$. μονάδες 3

Β2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{f(x)-1}$. μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. μονάδες 3

Β5. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $x_0f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$. μονάδες 5

Β6. Αν η γραφική παράσταση της g έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1,g(1))$ την ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(1, f(1))$. μονάδες 3

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2}\ln x(\ln x - 1) + \frac{5}{4}x^2 - \frac{x^3}{3}$, $x > 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει διάστημα $[\alpha, \beta]$ στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f'.

μονάδες 9

Γ2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο. μονάδες 8

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2}{2}\ln x(\ln x - 1) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{4}x^2$ έχει ακριβώς μια ρίζα. μονάδες 8

Θέμα Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, που ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$. μονάδες 4

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$ για κάθε $x > 0$. μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2018$. μονάδες 4

Δ4. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$. μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\int_2^3 \frac{f(t)}{t}dt < \int_3^4 \frac{f(t)}{t}dt$. μονάδες 4

Δ6. Αν Ε είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία $x = 1$, να δείξετε ότι $\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2}f(1) < \frac{1}{2}$. μονάδες 4

Στέλιος Μιχαήλογλου

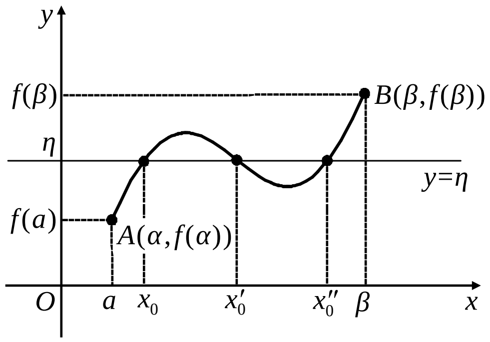
Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta,\ x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η *g* είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$, αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha)),B(\beta,f(\beta))$ δεν είναι σημεία οριζόντιας ευθείας, τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y=\eta$ με $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.



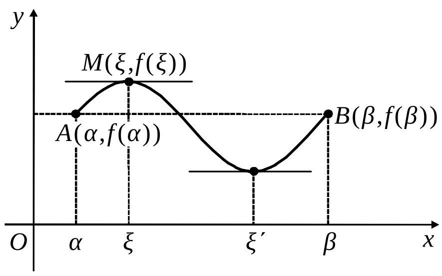
Α2. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Α3. Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και
- $f(\alpha)=f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Α4. **α)** Λ **β)** Λ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)=0$, οπότε $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{|g(x)|}\underset{\substack{x\to1\Rightarrow\\ \omega\to0}}{\overset{g(x)=\omega}{=}}\lim\limits_{\omega\to0}\dfrac{1}{|\omega|}=+\infty$

Β2. Από το σχήμα προκύπτει ότι $g(1)=0\Leftrightarrow\dfrac{f(1)-1^3}{1}=0\Leftrightarrow f(1)=1$ και για κάθε $x\in(0,1)$ είναι

$g(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{f(x)-x^3}{x}>0\overset{x\in(0,1)}{\Leftrightarrow}f(x)-x^3>0\Leftrightarrow f(x)>x^3$ οπότε $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\ge\lim\limits_{x\to1^-}x^3=1$ άρα $f(x)\ge1$ στο (0,1).

$$\lim_{x\to1^-}\frac{1}{f(x)-1}\ \underset{y\to0^+}{\overset{f(x)-1=y}{=}}\ \lim_{y\to0^+}\frac{1}{y}=+\infty$$

B3. 1ος τρόπος

Από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$ άρα σε μια περιοχή του $-\infty$ είναι $\frac{f(x)-x^3}{x}>0$ και επειδή $x<0$, είναι και $f(x)-x^3<0\Leftrightarrow f(x)<x^3$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)>0$ άρα σε μια περιοχή του $+\infty$ είναι $\frac{f(x)-x^3}{x}>0$ και επειδή $x>0$ είναι $f(x)-x^3>0\Leftrightarrow f(x)>x^3$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

2ος τρόπος

$g(x)=\frac{f(x)-x^3}{x}\Leftrightarrow f(x)=xg(x)+x^3\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xg(x)+x^3\right)=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xg(x)+x^3\right)=+\infty$. (Από το σχήμα προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$)

B4. Για $x\neq0$ είναι $g(x)=\frac{f(x)-x^3}{x}\Leftrightarrow f(x)=xg(x)+x^3$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-2,+\infty)$, είναι συνεχής στο $x=0$ οπότε:

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot g(x)+x^3\right)=0$

B5. Είναι $g(1)=g(10)=0$ και η g είναι συνεχής στο $[1,10]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,10)$ με

$$g'(x)=\frac{\left(f(x)-x^3\right)'x-\left(f(x)-x^3\right)x'}{x^2}=\frac{xf'(x)-3x^3-f(x)+x^3}{x^2}=\frac{xf'(x)-2x^3-f(x)}{x^2}.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(1,10)$ τέτοιο, ώστε $g'(x_0)=0\Leftrightarrow$

$$\frac{x_0f'(x_0)-2x_0^3-f(x_0)}{x_0^2}=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-2x_0^3-f(x_0)=0\Leftrightarrow x_0f'(x_0)-f(x_0)=2x_0^3$$

B6. Επειδή η ε εφάπτεται της C_g στο Α είναι $g'(1)=-\frac{1}{2}$. Όμως

$g'(x)=\left(\frac{f(x)-x^3}{x}\right)'=\frac{\left(f'(x)-3x^2\right)x-\left(f(x)-x^3\right)}{x^2}$ άρα

$$g'(1)=\frac{f'(1)-3-f(1)+1}{1^2}\Leftrightarrow f'(1)-2-f(1)=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)-2-1=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(1)=\frac{5}{2}$$

Η εφαπτομένη της C_f στο Β έχει εξίσωση $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=\frac{5}{2}(x-1)\Leftrightarrow y=\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}$

Θέμα Γ

Γ1. Είναι $f(x)=\frac{x^2}{2}\ln x(\ln x-1)+\frac{5}{4}x^2-\frac{x^3}{3}=\frac{x^2}{2}\ln^2x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{5}{4}x^2-\frac{x^3}{3}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(x)=x\ln^2x+\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}-x\ln x-\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}+\frac{5}{\cancel{4}_2}\cdot\cancel{2}x-x^2\Leftrightarrow$$

$f'(x)=x\ln^2 x+\cancel{x\ln x}-\cancel{x\ln x}-\frac{x}{2}+\frac{5x}{2}-x^2=x\ln^2 x+2x-x^2$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με: $f''(x)=\ln^2 x+\cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}+2-2x=\ln^2 x+2\ln x+2-2x$ και

$f^{(3)}(x)=\frac{2\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2=2\frac{\ln x+1-x}{x}$.

Επειδή $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$, είναι $f^{(3)}(x)<0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ και επειδή η f'' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $f''(x)>f''(1)=0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και για κάθε $x>1$ είναι $f''(x)<f''(1)=0$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$.

Επειδή η f' είναι συνεχής και δεν είναι γνησίως μονότονη, δεν είναι 1-1, δηλαδή υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1\ne x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)$. Επειδή η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ή $[x_2,x_1]$ και παραγωγίσιμη στα (x_1,x_2) ή (x_2,x_1), εφαρμόζεται για την f' το θεώρημα Rolle στο $[x_1,x_2]$ ή $[x_2,x_1]$.

Γ2. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln^2 x+2x-x^2\right)=0$ αφού

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln^2 x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln x}{-\frac{1}{x}}\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{\underset{DLH}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{\cancel{x}}}{-\frac{1}{x^{\cancel{2}}}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(0,1]$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$f'(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x),f'(1)\right]=(0,1]$.

Άρα $f'(x)>0$ στο Δ_1 επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=0$ οπότε

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}+\frac{2}{x}-2\right)\right]=-\infty$

Στο διάστημα $\Delta=(1,+\infty)$ η f' έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(\Delta)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x),f'(1)\right)=(-\infty,1)$.

Επειδή $0\in f'(\Delta)$ υπάρχει μοναδικό $x_1\in\Delta=(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=0$.

Για κάθε $1<x<x_1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_1)=0\Rightarrow f\nearrow[1,x_1]$. Επειδή η f είναι συνεχής στο 1, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,x_1]$.

Για κάθε $x>x_1\overset{f'\searrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_1)=0\Rightarrow f\searrow[x_1,+\infty)$. Η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_1.

Γ3. $\frac{x^2}{2}\ln x(\ln x-1)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{4}x^2\Leftrightarrow f(x)=0$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$, οπότε

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{5}{4}x^2-\frac{x^3}{3}\right)=0$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1 = (0, x_1]$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1) = (0, f(x_1)]$, άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, x_1]$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^3\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\ln x}{x} + \frac{5}{4x} - \frac{1}{3}\right)\right] = -\infty$ και η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2 = [x_1, +\infty)$ οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_2) = (-\infty, f(x_1)]$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο $f(\Delta_2)$ υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Επομένως η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα.

Θέμα Δ

Δ1. Για $x = 0$ η δοθείσα σχέση γίνεται: $f(0) - e^{-f(0)} = -1 \Leftrightarrow 0 = e^{-f(0)} - f(0) - 1$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^{-x} - x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = -e^{-x} - 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) < 0 \Rightarrow h \searrow \mathbb{R} \Rightarrow h$ "1−1".

Η σχέση (1) γίνεται: $h(f(0)) = h(0) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$.

Δ2. Είναι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) < 1$.

Είναι $\left(f(x) - e^{-f(x)}\right)' = (x-1)' \Rightarrow f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x)\left(1 + e^{-f(x)}\right) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}}$.

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{-f(x)} > 0$, έχουμε: $1 + e^{-f(x)} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-f(x)}} < 1 \Leftrightarrow f'(x) < 1$ (2).

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f''(x) = \left(\frac{1}{1+e^{-f(x)}}\right)' = -\frac{\left(1+e^{-f(x)}\right)'}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2} = \frac{e^{-f(x)}f'(x)}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^2}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) > 0 \Rightarrow f' \nearrow \mathbb{R}$.

Για την f εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ στο $[0, x],\ x > 0$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} .$$

Είναι $0 < \xi < x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-f(0)}} < \frac{f(x)}{x} < f'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x)}{x} < f'(x)$ (3).

Από (2),(3)$\Rightarrow$ $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) < x$ (4).

Δ3. Επειδή $f(x) < x$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Επειδή $f(x) > \frac{x}{2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2} = +\infty$ είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = \mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $f(A) = \mathbb{R}$.

Επειδή $2018 \in f(A)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x) = 2018$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

Δ4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{-f(x)}} \underset{u\to-\infty}{\overset{-f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{1+e^{u}} = 1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-f(x)} - 1\right) \underset{u\to-\infty}{\overset{-f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\left(e^{u} - 1\right) = -1$, άρα η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Δ5. Έστω G αρχική συνάρτηση της $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο $(0,+\infty)$. Τότε:

$$\int_2^3 \frac{f(t)}{t}dt<\int_3^4 \frac{f(t)}{t}dt \Leftrightarrow G(3)-G(2)<G(4)-G(3).$$

Η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $G'(x)=g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, οπότε είναι συνεχής στα $[2,3],[3,4]$ και παραγωγίσιμη στα $(2,3)$ και $(3,4)$. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi_1\in(2,3)$ και $\xi_2\in(3,4)$ τέτοια, ώστε

$$G'(\xi_1)=\frac{G(3)-G(2)}{3-2}\Leftrightarrow g(\xi_1)=G(3)-G(2) \text{ και } G'(\xi_2)=\frac{G(4)-G(3)}{4-3}\Leftrightarrow g(\xi_2)=G(4)-G(3)$$

Είναι $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Λόγω της σχέσης (4) για κάθε $x>0$ είναι

$xf'(x)>f(x)\Leftrightarrow xf'(x)-f(x)>0$ άρα $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$.

Είναι $\xi_1<\xi_2\overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow}g(\xi_1)<g(\xi_2)\Leftrightarrow G(3)-G(2)<G(4)-G(3)$

Δ6. Είναι $f(x)>\dfrac{x}{2}>0$ για κάθε $x>0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι το $E=\int_0^1 f(x)dx$.

Είναι $\dfrac{x}{2}<f(x)<xf'(x)<x$ άρα $\int_0^1\dfrac{x}{2}dx<\int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 xf'(x)dx<\int_0^1 xdx\Leftrightarrow$

$$\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1<\int_0^1 f(x)dx<\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 f(x)dx<\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1\Leftrightarrow \frac{1}{4}<\int_0^1 f(x)dx<f(1)-\int_0^1 f(x)dx<\frac{1}{2} \quad (5).$$

Είναι $\int_0^1 f(x)dx<f(1)-\int_0^1 f(x)dx\Leftrightarrow 2\int_0^1 f(x)dx<f(1)\Leftrightarrow E<\dfrac{1}{2}f(1)$, οπότε η (5) γίνεται:

$$\frac{1}{4}<E<\frac{1}{2}f(1)<\frac{1}{2}.$$