10η Άσκηση

Έως θεώρημα Bolzano

Έστω η συνάρτηση $f(x) = συνx - 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x ακριβώς σε ένα σημείο $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Κάνοντας κατάλληλο σχήμα , να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x ακριβώς σε ένα σημείο $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της f στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{συνx}{f(x)}$.

δ) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ε) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{συνx - 2x}{f^2(x)}$ **ii.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3f^2(x) - 4f(x) + 2}{f^2(x) + f(x)}$ **iii.** $\lim\limits_{x \to x_0} \left[(x - x_0)ημ\frac{1}{f(x)}\right]$

στ) Έστω $f_1(x) = f(x),\ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.Να δείξετε ότι

i. Η f_1 αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

ii. Η f_1^{-1} διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$

ζ) Να βρείτε τα α, β, $γ \in \mathbb{R}$ για τα οποία είναι $\lim\limits_{x \to 0} \frac{αf(x) + β}{x} = 2$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Είναι $f(0)=συν0-2\cdot 0+1=2>0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=συν\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}+1=-\pi+1<0$, δηλαδή $f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

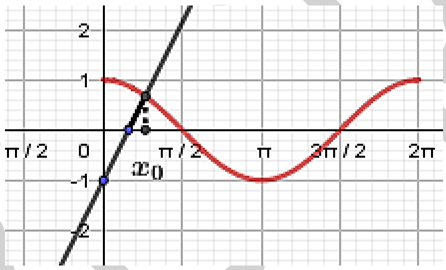
Έστω $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$, τότε $συνx_1>συνx_2\ (1)$, $-2x_1>-2x_2 \Leftrightarrow -2x_1+1>-2x_2+1\ (2)$.

Από $(1)+(2)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f\searrow\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f στο διάστημα αυτό.

β) $f(x)=0\Leftrightarrow συνx-2x+1=0\Leftrightarrow συνx=2x-1$

Για να αποδείξουμε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, αρκεί να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις $y=συνx$ και $y=2x-1$ τέμνονται σε ένα μόνο σημείο στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Για το λόγο αυτό κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση της $y=συνx$ και της ευθεία $y=2x-1$.



Παρατηρούμε ότι τέμνονται σε σημείο του οποίου η τετμημένη βρίσκεται στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Για κάθε $0<x<x_0 \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$ και για κάθε $x_0<x<\frac{\pi}{2}\overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(x_0)>f(x)\Leftrightarrow f(x)<0$

$\lim_{x\to x_0^+}\frac{συνx}{f(x)}=\lim_{x\to x_0^+}\left[συνx\frac{1}{f(x)}\right]=-\infty$ γιατί $\lim_{x\to x_0}συνx=συνx_0>0$ και $\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}\underset{\substack{x\to x_0^+\Rightarrow\\ u\to 0^-}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim_{u\to 0^-}\frac{1}{u}=-\infty$

δ) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(συνx-2x+1)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{συνx}{x}-2+\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty(0-2+0)=-\infty$

ε) i. $\lim_{x\to x_0}\frac{συνx-2x}{f^2(x)}=\lim_{x\to x_0}\left[(συνx-2x)\frac{1}{f^2(x)}\right]=(-1)(+\infty)=-\infty$ γιατί

$\lim_{x\to x_0}(συνx-2x)=συνx_0-2x_0=-1$ αφού $f(x_0)=0\Leftrightarrow συνx_0-2x_0+1=0\Leftrightarrow συνx_0-2x_0=-1$ και

$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f^2(x)}\underset{\substack{x\to x_0\Rightarrow\\ u\to 0^+}}{\overset{f^2(x)=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{1}{u^2}=+\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3f^2(x)-4f(x)+2}{f^2(x)+f(x)} \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to-\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{3u^2-4u+2}{u^2+u}=\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{3\cancel{u^2}}{\cancel{u^2}}=3$

iii. Για $x\neq x_0$ είναι

$$\left|(x-x_0)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right|=|x-x_0|\left|\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right|\le|x-x_0|\Leftrightarrow-|x-x_0|\le(x-x_0)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\le|x-x_0|$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0,\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(-|x-x_0|\right)=0$, από το κριτήριο παρεμβολής είναι και

$$\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)\eta\mu\frac{1}{f(x)}\right]=0\ .$$

στ) i. Η f_1 είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, οπότε είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Επειδή η f_1 είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, έχει σύνολο τιμών το

$f(\Delta)=\left[f\left(\dfrac{\pi}{2}\right),f(0)\right]=[1-\pi,2]$, άρα τ $D_{f_1^{-1}}=[1-\pi,2]$

ii. Αρκεί $f_1^{-1}(2)=0\Leftrightarrow f\left(f_1^{-1}(2)\right)=f(0)\Leftrightarrow 2=f(0)$ που ισχύει

ζ) Έστω $g(x)=\dfrac{\alpha f(x)+\beta}{x},\ x\neq0$ με $\lim\limits_{x\to0}g(x)=2$.

Τότε $xg(x)=\alpha f(x)+\beta$ και $\lim\limits_{x\to0}\left[xg(x)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\alpha f(x)+\beta\right]\Leftrightarrow 0=\alpha f(0)+\beta\Leftrightarrow\beta=-2\alpha$

Είναι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha f(x)+\beta}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\alpha(\sigma\upsilon\nu x-2x+1)-2\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to0}\alpha\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-2x+1-2}{x}=2\Leftrightarrow$

$\lim\limits_{x\to0}\left[\alpha\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}-\dfrac{2\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)\right]=2\Leftrightarrow\alpha(0-2)=2\Leftrightarrow-2\alpha=2\Leftrightarrow\ \alpha=-1$ και $\beta=-2(-1)=2$