Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Μαθηματικά προσανατολισμού
Γ΄ Λυκείου

Εκφωνήσεις

2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

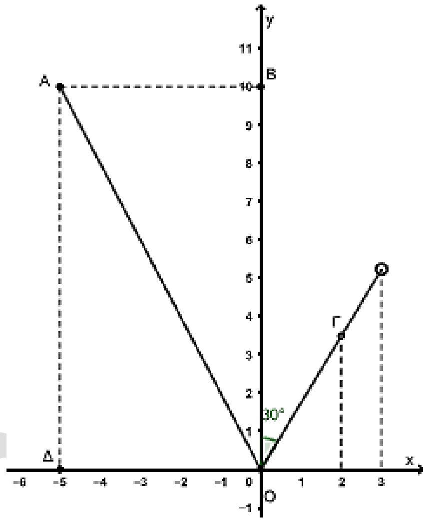
www.Askisopolis.gr

Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-arxiki-selida)

Συναρτήσεις

Θέμα 2ο

26603.Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f.**γ)** Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ;



26637.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=\ln x$.
α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\cdot g$.
β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$.
γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β).

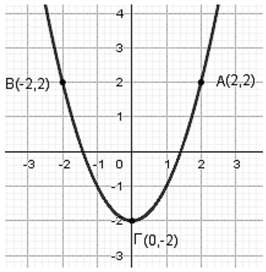
29830.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ και $g(x)=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.
α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.
β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις: **i.** $f\cdot g$ **ii.** $\frac{f}{g}$

Θέμα 4ο

26604.Δυο εταιρείες Ε1 και Ε2 δραστηριοποιούνται στο χώρο της γεώτρησης νερού. Η πολιτική των χρεώσεων προς τους πελάτες τους είναι διαφορετική. Η εταιρεία Ε1 χρεώνει 1500 ευρώ για την εκπόνηση της αρχικής μελέτης και 200 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μέχρι τα 15 πρώτα μέτρα. Αν δεν βρεθεί νερό μέχρι τα 15 μέτρα, τότε αλλάζει τη χρέωση από 200 σε 250 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους μετά τα 15 πρώτα. Η Ε2 χρεώνει 300 ευρώ για κάθε μέτρο βάθους.
α) Αν f(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία Ε1 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε:
i. Τον τύπο της συνάρτησης f.
ii. Το ποσό που θα χρεώσει η εταιρεία Ε1 σε πελάτη που χρειάστηκε να φτάσει σε βάθος 12 μέτρων μέχρι να βρει νερό.
iii. Αν κάποιος πελάτης ξόδεψε για τη γεώτρησή του 5050 ευρώ, σε ποιο βάθος έφτασε;
β) Αν g(x) είναι το ποσό που χρεώνει η εταιρεία Ε2 για γεώτρηση x μέτρων βάθους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g.
γ) Σε ποιο βάθος σταμάτησαν τη γεώτρησή τους δυο γείτονες που συνεργάστηκαν με διαφορετική εταιρεία ο καθένας τους, βρήκαν νερό στο ίδιο βάθος και πλήρωσαν ακριβώς το ίδιο ποσό;
δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της μεταβλητής x (μέτρα βάθους) συμφέρει η επιλογή της εταιρείας Ε1;

Σύνθεση Συναρτήσεων

Θέμα 2ο



28304. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2,2)$, $B(-2,2)$ και $\Gamma(0,-2)$.

Έστω επίσης η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=|x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$.

β) Να βρείτε τις τιμές $(gof)(2)$, $(gof)(-2)$ και $(gof)(0)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω.
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης gof.

29831. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα (-1, 1).

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$.

γ) Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$, $x\in\mathbb{R}^*$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f\circ g)(x)$.

29832. Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}^*$ και της g το διάστημα (-1, 1).

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $(f\circ g)(x)$.

35168. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g και h ώστε :

$$f(x)=\ln(1+e^x),\quad g(x)=2\ln x \quad \text{και} \quad h(x)=\ln(1+x^2).$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f\circ g$ και h είναι ίσες.

Μονοτονία και ακρότατα συνάρτησης
Θέμα 2ο

23216.Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

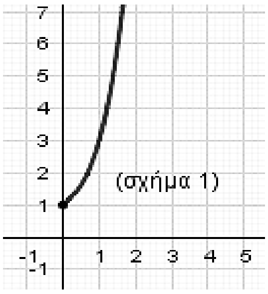
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον x΄x.

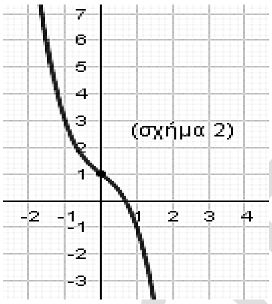
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$.

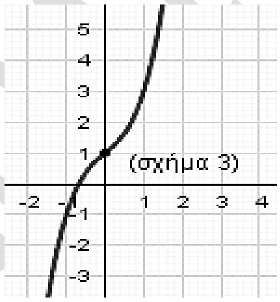
23642.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3+x+1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.







γ) i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$.

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3+x+1|=2023$.

26602.Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x)=x-2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h, με $h(x)=|g(x)|$.

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h.

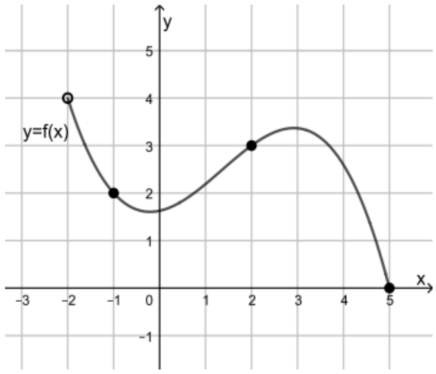
28300.Έστω μια συνάρτηση fτης οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f,

β) τις τιμές $f(-1), f(2)$ και $f(5)$,

γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f, εφόσον υπάρχουν,

δ) την τιμή της σύνθεσης fof στο -1.



35170.Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε: $f(x)=\ln(1+e^x)$ και $g(x)=2\ln x$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f + g.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f + g ως προς τη μονοτονία.

Αντίστροφη συνάρτηση

Θέμα 2ο

23196. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

Έστω $f^{-1}(x)=\ln(x+1),\ x>-1$.

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f,\ f^{-1}$.

23198. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}-1,\ x\ge 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

Έστω $f^{-1}(x)=(x+1)^2,\ x\ge -1$

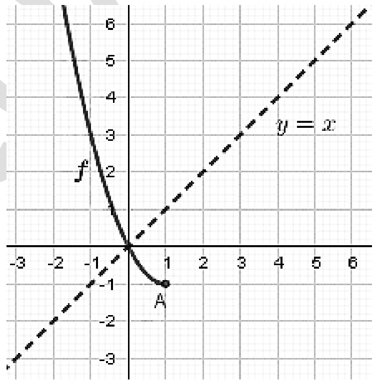
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των $f,\ f^{-1}$.

23209. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2-1,\ \ x\le 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.



24569. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f=[0,1]$.

β) **i.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι "1 – 1".

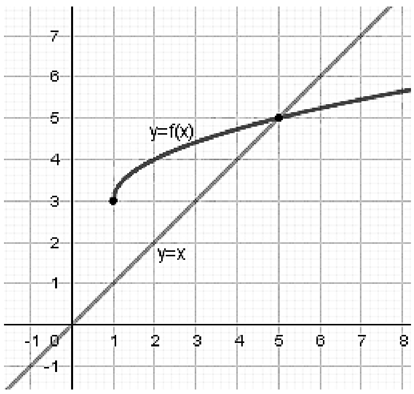
ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x))=0,\ x\in[0,1]$.

24130. Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\sqrt{x-1}+3,\ x\ge 1$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.

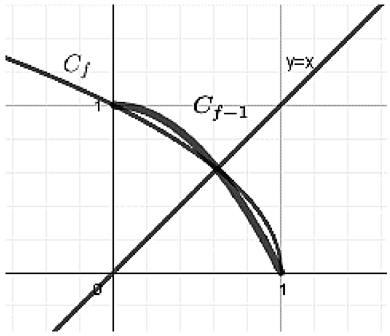
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών καθώς και την αντίστροφη της f.

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f καθώς και η διχοτόμος $y=x$ της γωνίας xOy. Αφού μεταφέρετε το σχέδιο στην κόλλα σας, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f^{-1} και με βάση το σχήμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, f^{-1}.



24703.Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x}$ και $x\in(-\infty,1]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1}.
β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.
γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και ένα τμήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1}. Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων το παραπάνω σχήμα και το οποίο να συμπληρώσετε με την υπόλοιπη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}.



24991.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=-2\ln x+1$, $x>0$.

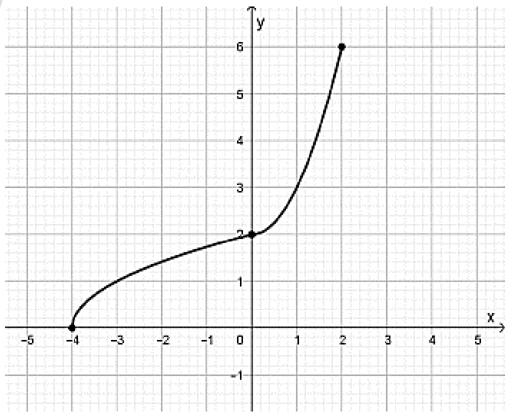
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.
γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x)=1-\ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f=g$.

25124.Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=-x^3$, $x\in(-\infty,0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.
γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}.

27277.Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f. Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

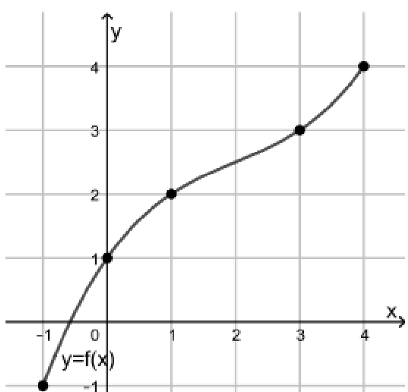
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$.
γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f.



27317.Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[0,2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο [0,2].
β) Να αποδείξετε ότι:
 i. Το σύνολο τιμών της f είναι το [0, 2].
 ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.
 iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

28299.Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A=[-1,4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :



α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f,

β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=x$,

γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

29835.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ και $g(x)=2-x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.

β) Να αποδείξετε ότι για $x\in(-\infty,3]$ η $(f\circ g)(x)=\sqrt{3-x}-1$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x)=(f\circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφό της.

29926.Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x)=\ln(x-2)+5$ για κάθε $x>2$ και $g(x)=2x-1$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1}.

β) i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f\circ g^{-1}$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f\circ g^{-1}$.

31528.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(1-e^{-x}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την f^{-1}.

32695. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$, σύνολο τιμών το $\left[-\frac{1}{2},1\right)$ και τύπο $f(x)=1-\frac{3}{\sqrt{x}+2}$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $\left[-\frac{1}{2},1\right)$, σύνολο τιμών το $[0,+\infty)$ και τύπο $g(x)=\left(\frac{1+2x}{1-x}\right)^2$. Με δεδομένο ότι η συνάρτηση f είναι 1-1,

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)<0$ και $g(x)>0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία.

35171.Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε : $g(x)=2\ln x$, $x>0$ και $h(x)=\ln\left(1+x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη **ii.** $g^{-1}(x)=e^{\frac{x}{2}}$ με $x\in\mathbb{R}$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h\circ g^{-1}$.

Θέμα 4ο

23200. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1,\ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της.

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f\left(\alpha\ln\alpha\right)\le f\left(\ln\alpha\right)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=\ln 2$.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\left(3-\ln 2\right)x-3,\ x\in\mathbb{R}$.

Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται.

Όριο συνάρτησης στο x_0

Θέμα 2ο

24768. Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x)=x^2-x+1$ και $g(x)=\sqrt{4x-3}$.

α) Να αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)\geq \frac{3}{4}$.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h=g\circ f$.

γ) Αν $h(x)=|2x-1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)-1}{\sqrt{x+1}-1}$.

28477. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x)=e^{3x+2}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g.

β) Να βρείτε την συνάρτηση gof.

γ) Αν $g(f(x))=6x+4$, $x\in\mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(gof)(x)-\eta\mu^2 x-4}{x}$.

Μη πεπερασμένο όριο στο x_0

Θέμα 2ο

23217. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x-1)$ και $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 1}g(x)$

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f\cdot g$ **ii.** το $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))$.

Όριο στο άπειρο

Θέμα 2ο

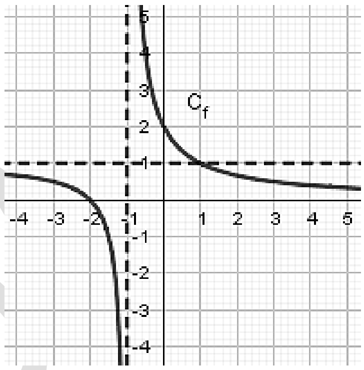
23641. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^2\right)<f\left(x\right)$.

β) Αν $\alpha^2<\alpha$, τότε να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[f\left(\alpha^2-\alpha\right)-f\left(0\right)\right]x\right)=-\infty$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^x-1\right)=f\left(0\right)$.

23314. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη – 2. και τον άξονα y΄y σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)$ **ii)** $\lim\limits_{x\to -2^+}f\left(x\right)$ **iii)** $\lim\limits_{x\to -2^-}f\left(x\right)$

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{1}{f\left(x\right)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to -2^-}\ln\left(f\left(x\right)\right)$

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

34439. Δίνονται οι συναρτήσεις $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x-1}, x\neq 1$ και

$g\left(x\right)=\dfrac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h\left(x\right)=\left(f\circ g\right)\left(x\right)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h\left(x\right)=\left(f\circ g\right)\left(x\right)$.

Αν $h\left(x\right)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$, $x\in\mathbb{R}^*$ τότε:

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι ‘1-1’.

γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}h\left(x\right)$.

Συνέχεια Συνάρτησης

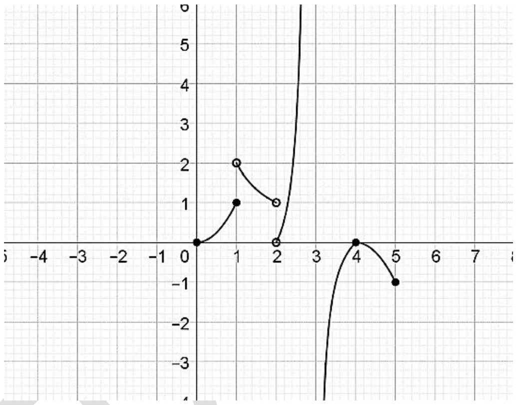
Θέμα 2ο

24767. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{e^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

25749. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f=[0,2)\cup(2,3)\cup(3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες (0,0) και (4,0). Επίσης, δίνεται ότι f(1)=1.



Με βάση το παρακάτω σχήμα:

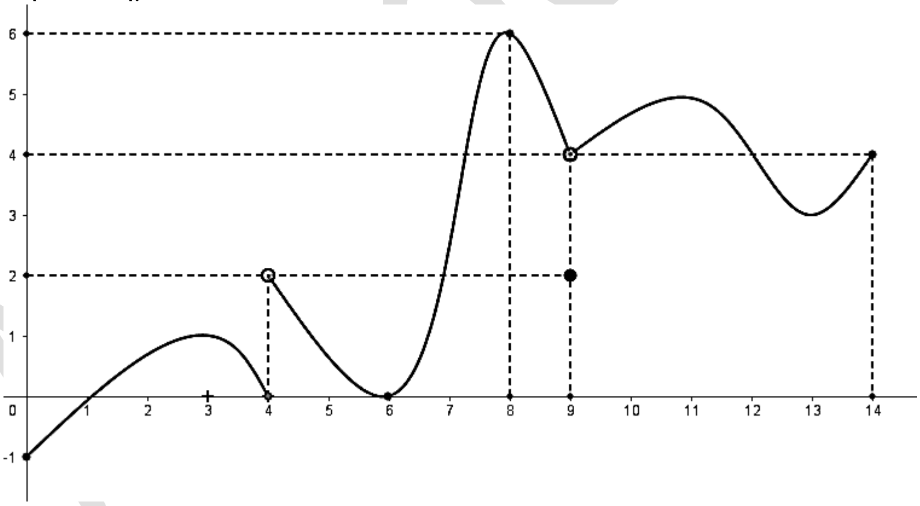
α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας.

β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{f(x)}$

27318. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

iv. $\lim\limits_{x\to 14} f(x)$ **v.** $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

31548. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $\left|f(x)-2x\right|\le(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1)=2$.

β) $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

γ) η f είναι συνεχής στο 1.

Θέμα 3ο

24761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}2023-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\ne0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2022$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=2022$.

28684. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\kappa$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x)\le\eta\mu2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\eta\mu2x}{x}=2$.

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa=2$.

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

“ $\left|f(x)\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}\right|=-f(x)\cdot\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}$ κοντά στο 0 ”

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

Θεωρήματα Συνέχειας

Θέμα 2ο

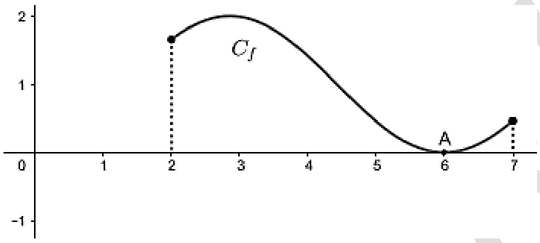
29834.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\sqrt{9x^2+16}-\frac{5}{2}\ln\left(8x+1\right)$.

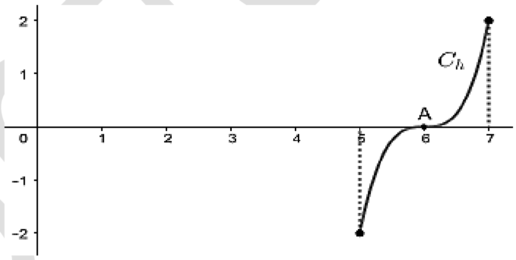
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
β) Να αποδείξετε ότι $f(0)>0$ και $f(1)<0$.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(x\right)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

34024.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{1}{e^{2x}}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε γραφική παράσταση:

α) Να βρείτε
i. Την μονοτονία της συνάρτησης f.
ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f.

36839.Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A\left(6,0\right)$.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h.
β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:
i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους.
ii. Παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους.

Θέμα 4ο

23106. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, τέτοιες ώστε: $(gof)(x)=|συνx|$, για κάθε $x\in[0,\pi]$.

α) i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)|=|ημx|$.

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Να βρείτε την συνάρτηση f.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h:(0,\pi]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\dfrac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο: $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.

26640. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x^3+2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.
γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.
δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$.

29838. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x\neq 0$ ισχύει:
$xf(x)+συνx=1-x^2ημ\dfrac{1}{x}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-συνx}{x}=0$ **ii.** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi},+\infty\right)$.

Παράγωγοι

Ορισμός παραγώγου

Θέμα 2ο

24756. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$.

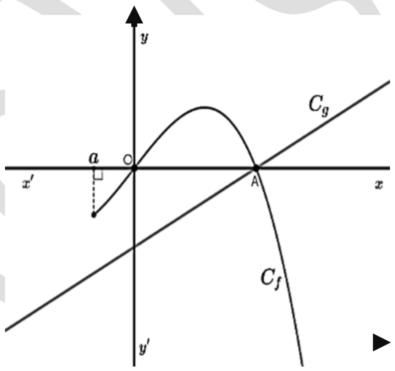
α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}$.

25234. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,+\infty)\to\mathbb{R}$ και την συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},\ x\in\mathbb{R}$.

Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f,g αντίστοιχα, φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:



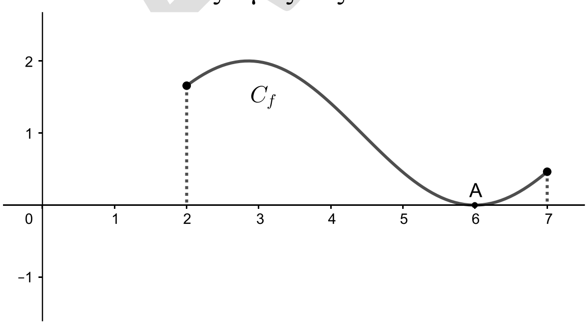
- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα x'x εκτός από τα σημεία Ο και Α.

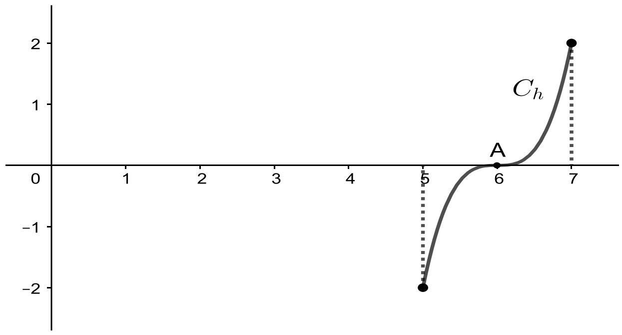
α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)}$.

β) Αν είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}$.

36840. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h. Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα x΄x στο σημείο του A(6,0). Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{h(x)}$ **iii.** $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6}$

Κανόνες παραγώγισης

Θέμα 2ο

27315.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x<2\\ \alpha x^2-4, & \text{αν } x\geq 2\end{cases}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0=2$, δηλαδή τα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

γ) Αν α = 2, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f.

31743.Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\eta\mu x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=f'(x)-\dfrac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν $\varphi(0)<0$ και $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right)>0$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

34437.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+2x$, $x>0$ και $g(x)=e^{x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1.

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g.

Εφαπτομένη καμπύλης

Θέμα 2ο

24757. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45°.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=1$.

25762. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\le 0\\ \eta\mu x, & x>0\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=0$ και $f'(0)=1$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0,\,0)$.

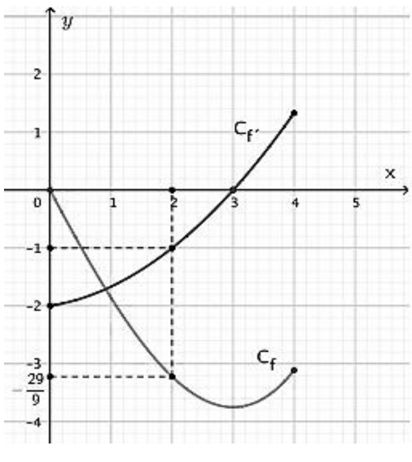
26630. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^x & ,\ \alpha\nu\ x<0\\ 1 & ,\ \alpha\nu\ x=0\\ \sigma\upsilon\nu x & ,\ \alpha\nu\ x>0\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=0$.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x=\dfrac{\pi}{2}$.

26712. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα [0, 4], και της παραγώγου της, f ΄.



α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_o=2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_o=2$.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα x΄x.

28302. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0)=-2$ και $f'(0)=0$.

Έστω επίσης οι συναρτήσεις $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-x$ και $gof:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(\,gof)(0)$.

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$.

γ) Να βρείτε την παράγωγο της gof στο $x_0=0$.

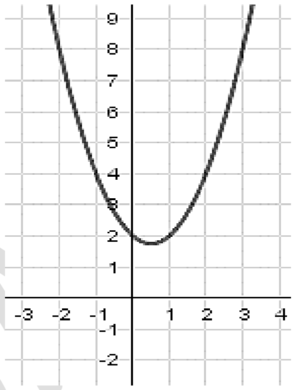
δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της gof στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

33816.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = x^2 - x + 2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της $B(1,2)$.

γ) Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y = x + 1$.



33632.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \le 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o = 0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση.

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$
.

Θέμα 4ο

28340.Έστω μια συνάρτηση $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = -1$ και η συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -x + 1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1,\ f(-1))$, έχει εξίσωση $y = g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$.

β) Να βρείτε:

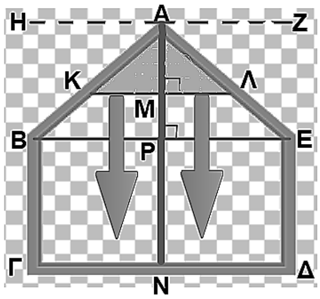
i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων fog και gof,

ii. τις παραγώγους $(fog)'(2)$ και $(gof)'(-1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη $x_1 = 2$ και η εφαπτομένη της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = -1$, ταυτίζονται.

Ρυθμός μεταβολής

Θέμα 4ο

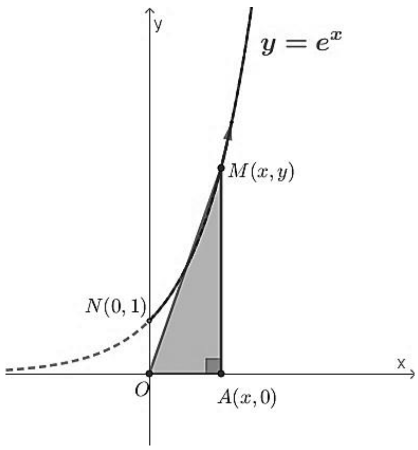


25257. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $ΒΓΔΕ$ και το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΕ$. Είναι $ΑΡ = 0,8\,\text{m}$, $ΒΕ = 1,6\,\text{m}$, $ΑΜ = x\ \text{m}$, $ΒΓ = 1\text{m}$. Το ορατό κάτω μέρος $ΚΛ$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση $ΗΖ$, με σταθερό ρυθμό, ώστε το $Μ$ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΝ$ (με $ΑΜ \neq 0$). Αν $Ε = Ε(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό $Ε$, ισχύει $Ε(x) = \begin{cases} x^2 &, \text{ αν } x \in \left(0, \dfrac{4}{5}\right) \\ \dfrac{8}{5}x - \dfrac{16}{25}, & \text{ αν } x \in \left[\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{5}\right] \end{cases}$, σε m^2.

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $Ε$ ως προς x, όταν $x = \dfrac{4}{5}\ \text{m}$, είναι ίσος με $Ε'\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{8}{5}\ \text{m}^2/\text{m}$.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $Ε$ ως προς τον χρόνο t, τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \dfrac{4}{5}\ \text{m}$, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0,08\ \text{m/s}$ για κάθε $t \geq 0$.



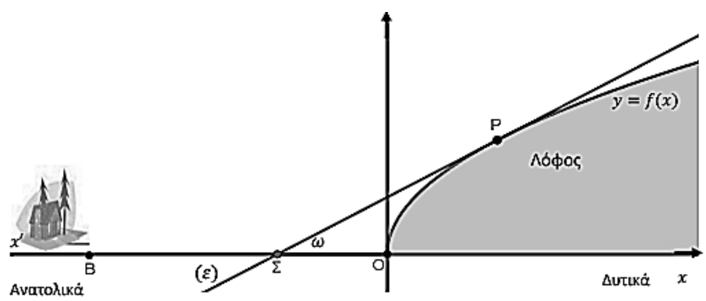
28685.α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2$, $x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$.

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $Ν(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x$, $x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2\text{cm}/\text{sec}$.

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $Ο(0,0)$, $Α(x,0)$ και $Μ(x,y)$ είναι $Ε(x) = \dfrac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$.

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε είναι $3e^2\text{cm}^2/\text{sec}$.

33577. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση Β του αρνητικού ημιάξονα Οx'. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Οx, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$.



Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.
Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του ΟΣ, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t, όπως φαίνεται στο σχήμα.
Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο Ο του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά. Ας είναι $\hat{\omega} = \mathrm{P}\hat{\Sigma}\mathrm{O}$.

α) Αν το σημείο Ρ έχει συντεταγμένες $\mathrm{P}(x_{\mathrm{P}}, y_{\mathrm{P}})$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_{\Sigma} = -x_{\mathrm{P}}$.

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{1}{2}(x_{\mathrm{P}}(t))^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά (ΟΣ) τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16}$ rad ανά λεπτό. Δίνεται ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega$.

36815. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2, 2]$, για την οποία ισχύει $f^2(x) + x^2 = 4$ για κάθε $x \in [-2, 2]$.

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f.

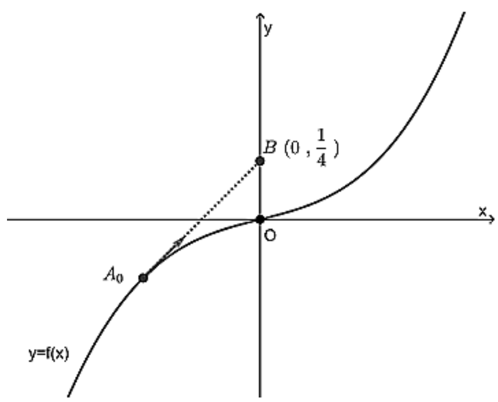
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f. Καθώς περνάει από το σημείο $B(-1, \sqrt{3})$, η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το Β.

36787. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$.

α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ έχει εξίσωση $y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3$.

β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Οxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_o, που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0, οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$.



i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A_0.

ii. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_o, είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή t_o.

Θεώρημα Rolle

Θέμα 2ο

31643. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x,\ \ x \in [1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

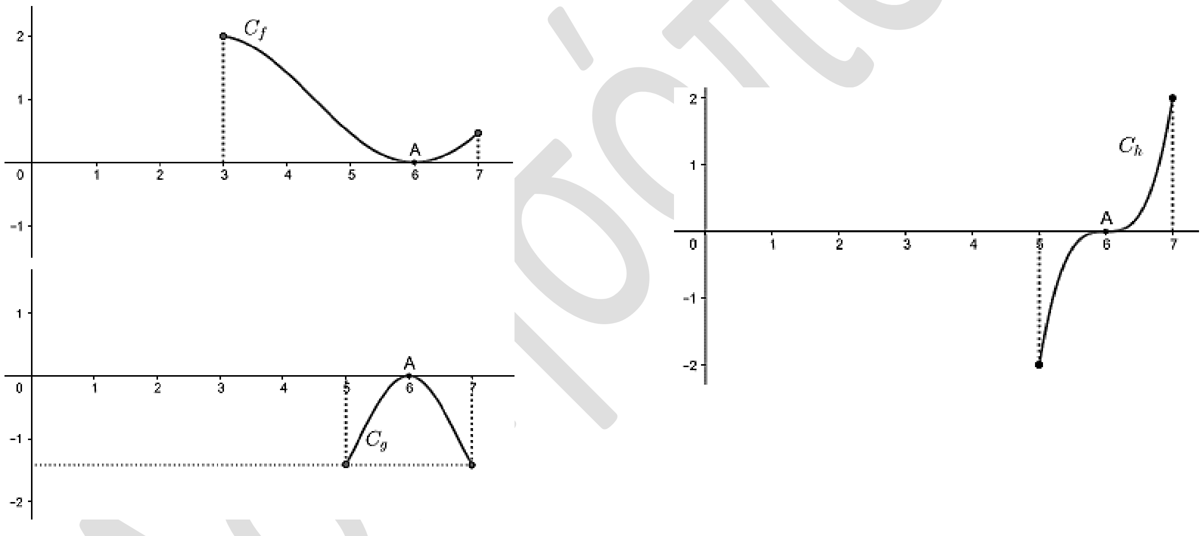
36851. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x \le 0 \\ x^2 - 3x + 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[-1,1]$ και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$.

36842. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f, g και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f, g και h.

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους.

ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της.

Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θέμα 2ο

24283.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{αν } x\in[-1,2] \\ x-1, & \text{αν } x\in(2,5] \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.
β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$.
γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$.

36827.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\ln x,\ x>0$ και $g(x)=e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1}=-f$.
β) Να αποδείξετε ότι $(g\circ f)(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
γ) Έστω $h(x)=(g\circ f)(x)$.
Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα$[2,8]$.

Θέμα 4ο

29150.Η συνάρτηση $x(t)=(t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.
α) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν.
ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά.
β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διένυσε το κινητό Α.
γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό.

Σταθερή συνάρτηση

Θέμα 4ο

23199.στω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$να ισχύει $xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}$ και $f(e)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f.

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,\,0)$ και $B(e,\,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\frac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\frac{1}{x}$.

33999.Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x}\le f(x)\le 1+\frac{1}{x},\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x)\cdot\ln(x+1)=-f(x)$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\ln(x+1),\ x>0$ είναι σταθερή.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x}\le g(x)\le\ln(x+1)+\frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f .

Μονοτονία συνάρτησης

Θέμα 2ο

23937. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο της $A(1,f(1))$.

25764. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1), & x\ge 0\\ x^3, & x<0\end{cases}$.
α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o=0$.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

27082. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3-3x,\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.
β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-5,+\infty)$.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$.

29211. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2},\ x<0$.
α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.
β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) **i.** Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”.
ii. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}.

33633. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+3x+2,\ x>0$.
α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία.
β) **i.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x)+2023=0$ έχει θετική λύση.

Θέμα 4ο

23375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),\ x\in\mathbb{R}$.
α) Να αποδειχθεί ότι $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$.
γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x+f(x))>x,\ x\in\mathbb{R}$.

23376. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=\ln x,\ x\in(0,+\infty)$. Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.
β) Να αποδείξετε ότι:
i. η συνάρτηση h είναι περιττή. **ii.** η συνάρτηση h είναι “1-1”.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $h\left(x-1\right)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0,\ x>0$.

26605.Δίνεται συνεχής συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :
$f^2\left(x\right)-5=x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f\left(2\right)=3$.
α) Να αποδείξετε ότι :
i. $f\left(x\right)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
ii. $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+5}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g\left(x\right)=x^2-\sigma\upsilon\nu x$, με $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty,0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.
ii. Η εξίσωση $f^2\left(x\right)=5+\sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $\left(-\pi,\pi\right)$.

27319.Δίνεται η συνάρτηση f με $f\left(x\right)=\left(x-2\right)e^x+\left(x-1\right)\ln x$, $x\in\left(0,+\infty\right)$.
α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα (1,2).
β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f ΄και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια.
γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x’x στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα x’x σε δύο ακριβώς σημεία.

27455.Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f\left(x\right)=\begin{cases}-1, & x<2\\ e^{x-2}-2, & x\geq 2\end{cases}$ και $g:\mathbb{R}-\left\{2\right\}\to\mathbb{R}$ με $g\left(x\right)=-\frac{1}{2}x^2+2x-3$.
α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:
i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f\left(x\right)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x\neq 2$.
γ) Δίνεται ο ισχυρισμός:
«Αν $f\left(x\right)>g\left(x\right)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)>\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)$.»
Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

31793.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f\left(x\right)=\ln x+1-\frac{1}{x},\ x>0$ και $g\left(x\right)=\ln\left(\ln x\right),\ x>1$.
α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T\big(e, g(e)\big)$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε).

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x) < f(x)$ για κάθε $x > 1$. Ένα σημείο $M(x, 0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $2\ \text{cm}/\text{sec}$ πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B\big(x,\ f(x)\big),\ \Gamma\big(x,\ g(x)\big)$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΒΓ τη χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στη θέση $\left(e^2, 0\right)$.

32524.Έστω η συνάρτηση $g:(0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \dfrac{e}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x) = x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 1$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{e - x\ln x - ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

33388.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi + 1\right)$.

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία.

γ) Να δείξετε ότι:

i. $\left|f'(x)\right| \le 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **ii.** $\left|f(\beta) - f(\alpha)\right| \le 3\left|\beta - \alpha\right|$.

Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Θέμα 2ο

23197. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

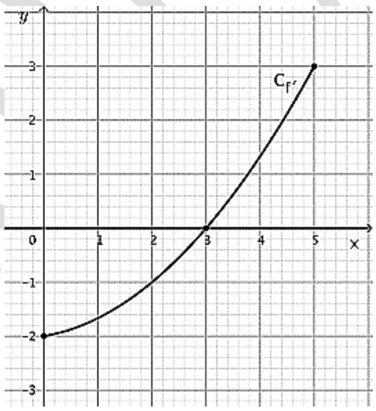
γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f.

25761. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1,\ x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x + 1 = x$.

26707. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.



α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$;

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 3] και γνησίως αύξουσα στο [3, 5].

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

32390. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ \ x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

34025. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\ln x},\ x \in (1, +\infty)$.

α) i. Να δείξετε ότι $f'(x) < 0$ με $x \in (1, +\infty)$.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

β)i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. **ii.** Να βρείτε την αντίστροφη της f.

Θέμα 4ο

23311. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1. Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

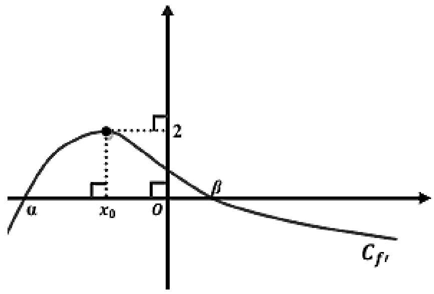
α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους *υ* που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \dfrac{1}{2}$.

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \dfrac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0,1\mathrm{m}/\sec$.

23210.Θεωρούμε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f(x+1)-f(x)\le 2$.

24579.Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x-x$.

α) i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$.

24587.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x-x$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x$.

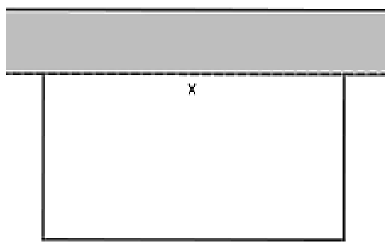
Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,|x_0-\ln x_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y=x$, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,(x_0-\ln x_0)$.

β) i. Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε.
ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

26633.Με συρματόπλεγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρείς πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.



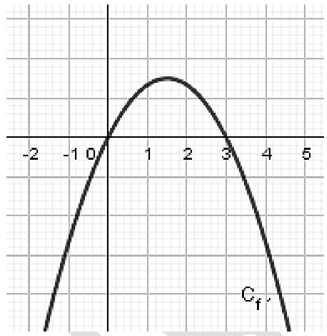
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους x, δίνεται από τον τύπο:

$E(x)=200x-\frac{1}{2}x^2$ με $0<x<400$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδό $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο.

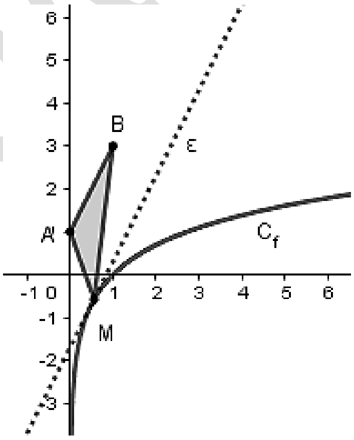
γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(x)$ της περιφραγμένης περιοχής.
δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x, που ανήκει
στο διάστημα (0, 200) για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με 300·π τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

27092.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας πολυωνυμικής συνάρτησηςf τρίτου βαθμού.



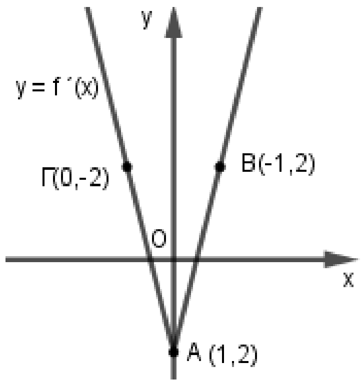
α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(3,2)$, τότε να βρείτε τα ακρότατα της f.
γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f.
δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$, στο διάστημα $(0,3)$.

27650. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x,\ x>0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.



α) i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία ΑΒ.
ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0.
β) Έστω $E(x)=\frac{1}{2}(2x+1-\ln x),\ x>0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ, όπου Μ ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο Μ ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος.
γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή Α.

28337.Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f ΄, είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0,-2)$και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1,2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1,2)$.



α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$.
β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f.
δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΔ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.

28338.Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία έχει τοπικό ελάχιστο το $f(2)=-32$. Οι γραφικές παραστάσεις της f και της παραγώγου f ΄τέμνονται στο σημείο $A(-2,0)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f στα σημεία με τετμημένες:

i. $x_1=2$, **ii.** $x_2=-2$.

β) Δίνεται επιπλέον ότι η f ΄ είναι πολυωνυμική συνάρτηση 2[ου] βαθμού και η γραφική παράσταση της f ΄διέρχεται από το σημείο $B(0,-12)$. Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x)=3x^2-12$,

ii. $f(x)=x^3-12x-16$,

iii. η εξίσωση $f(x)=-20$ έχει τρεις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

23215.Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0)=-1$ και $f(2)=1$.

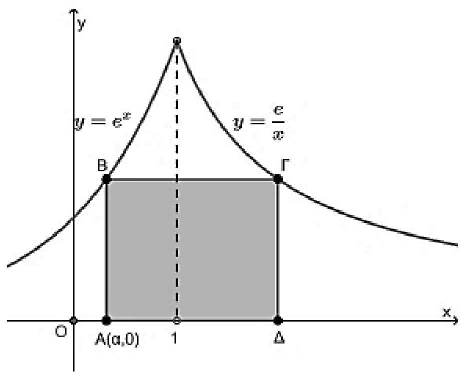
β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,2)$.

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o.

28342.Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα x'x και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=e^x, x<1$ και $g(x)=\dfrac{e}{x}$, $x>1$, αντίστοιχα.



Έστω $A(\alpha,0)$ με $\alpha<1$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta=e^{1-\alpha}$,

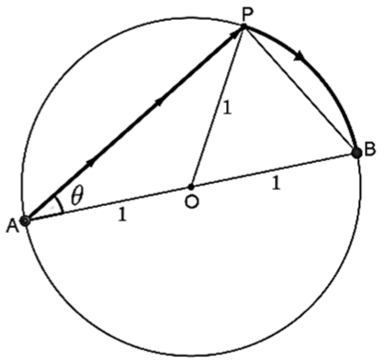
ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι

$$E(\alpha)=e-\alpha e^{\alpha},\ \alpha<1.$$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ .

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1.

28532.Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας 1 Km και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η ΑΒ να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΡ έχοντας ταχύτητα $3\ \text{Km}/\text{h}$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου ΡΒ με ταχύτητα $6\ \text{Km}/\text{h}$.



Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $\hat{PAB}$ είναι θ rad.

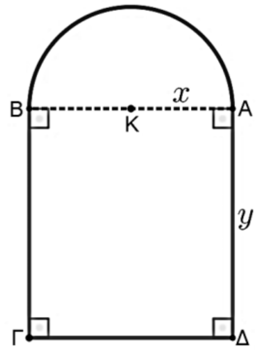
α) Να αποδείξετε ότι $(AP)=2\sigma\upsilon\nu\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι $f(\theta)=\frac{1}{3}(2\sigma\upsilon\nu\theta+\theta)$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος.

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$.

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία x rad σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S=x\cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

28534.Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με 4m, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK)=x\ \text{m}$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(A\Delta)=y\ \text{m}$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y=-\frac{\pi+2}{2}\cdot x+2$ και $E(x)=-\frac{\pi+4}{2}\cdot x^2+4x$, με $x\in\left(0,\frac{4}{\pi+2}\right)$.

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου.

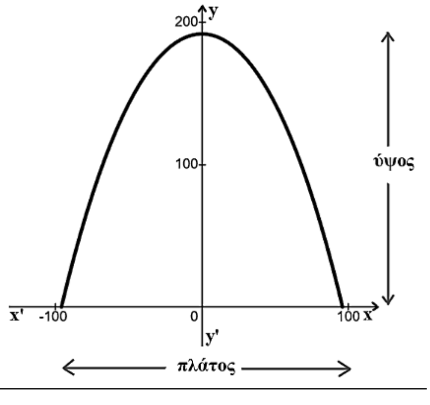
γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)}$.

29149.Δίνεται η συνάρτηση $g:[-96,96]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

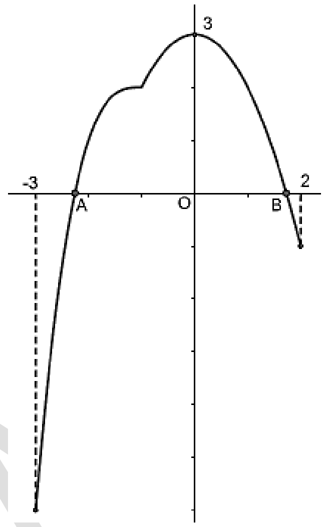
β) Αν $\alpha>0$ και $f(x)=2\alpha\left[g(96)-g(x)\right]$, $x\in[-96,96]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-96,96)$.



ii. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της.

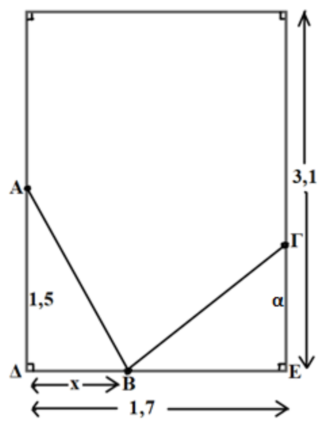
29644.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία A και B.
Έστω g η συνάρτηση με $g(x)=f(x)+x,\ x\in[-3,2]$.



α) Να αποδείξετε ότι:
i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2].
ii. Η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.
β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y=x+3$.

29927.Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.
α) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 1^-} f(x),\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
β) i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^\alpha$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=\alpha$ και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

31680.Ένα γαλλικό μπιλιάρδο έχει μήκος $3,1$ μέτρα και πλάτος $1,7$ μέτρα. Ένας παίκτης χτυπάει την άσπρη μπάλα με τέτοιο τρόπο ώστε αυτή να χτυπήσει πρώτα στο σημείο A, μετά να κινηθεί ευθύγραμμα μέχρι το σημείο B και από εκεί να συνεχίσει ευθύγραμμα μέχρι το σημείο Γ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δίνονται τα μήκη $\Delta B = x$, $\Delta E = 1,7$,
$A\Delta = 1,5$, $\Gamma E = \alpha$ και $L = AB + B\Gamma$ που εκφράζονται σε μέτρα.



α) Να αποδείξετε ότι $L=L(x)=\sqrt{x^2+2,25}+\sqrt{(1,7-x)^2+\alpha^2}$,
$x\in\left(0,\dfrac{17}{10}\right)$.
β) Δίνεται ακόμη ότι το L γίνεται ελάχιστο μόνο όταν το B απέχει $1,02$ μέτρα από το Δ.
i. Αν $L'(x)=\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+2,25}}-\sqrt{\dfrac{(1,7-x)^2}{(1,7-x)^2+\alpha^2}}$, $x\in\left(0,\dfrac{17}{10}\right)$ να δείξετε ότι $\alpha=1$.
ii. Αν $L''(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{17}{10}\right)$, να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1,02}\dfrac{1}{L'(x)}$, εφόσον υπάρχει.

33596.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $A(0,2)$. Αν $K(x,\ln x)$ με $x>0$ τυχαίο σημείο της C_f και $M(x_o,\ln x_o)$ με $x_o>0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A, να αποδείξετε ότι:
α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x>0$ είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$.

β) $x_o^2+\ln x_o-2=0$.

γ) η εφαπτομένη της C_f στο M

i. είναι κάθετη στην AM.

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $\left(x_o^3-x_o,0\right)$.

33642. Έστω f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)+2x=f'(x)+x^2$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. $f(x)=e^x+x^2,\ x\in\mathbb{R}$

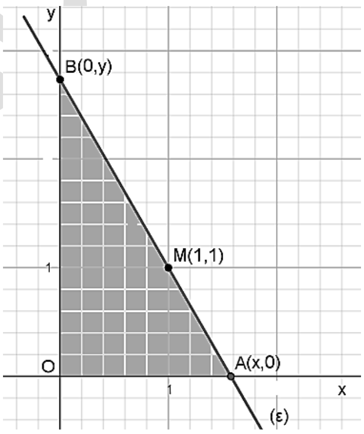
β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o,\ f(x_o)),\ x_o\in(-1,\ 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει

$$e^{-1}<m<2.$$

34440. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο M(1,1). Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το M τέμνει τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy στα σημεία $A(x,0),\ x>0$ και $B(0,y),\ y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



α) Για $x\in(1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο:

$$E(x)=\frac{x^2}{2(x-1)}.$$

β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου OAB παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί .

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3,E(3))$ και τα σημεία Γ, Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα.

δ) Ένα σημείο $K(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του.

34441. Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι:

$K(x)=20x+\dfrac{2000}{x}+1220$ ευρώ με $x>0$.

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος.
γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος.
δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος;

36814.Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν $800\ m^2$. Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:
α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x, είναι:

$$K(x) = 8x + \frac{3200}{x},\ x > 0.$$

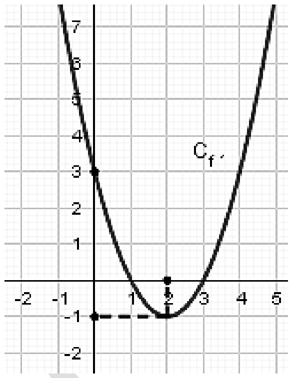
β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του.
γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε x > 0.

Θέμα 3ο

34026.Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - 2\ln x,\ x > 0$.
α) Να βρείτε:
i. Την μονοτονία της συνάρτησης f
ii. Το πρόσημο της f.
β) i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{\ln x}{x^2},\ x > 0$,έχει μέγιστη τιμή την $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2e}$.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

Κυρτότητα – Σημεία καμπής

Θέμα 2ο



26736. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2,-1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$.

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o = 2$;

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2)-1=0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 2$.

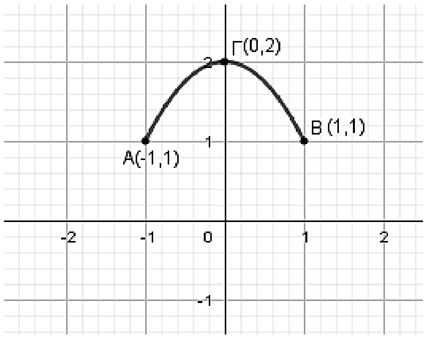
31527. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f, διαφορετικό από το A, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε).



32799. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$ και η ευθεία $y = 2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $A(-1,1),\ B(1,1),$ και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1 \le f'(x) \le 2$, για κάθε $x \in [-1,1]$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

34438. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις: $f'(x) = 0$ και $f''(x) = 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

35172. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1+x^2)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της.

Θέμα 4ο

23312. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2, 2]$ τέτοια ώστε:f συνεχής στο $[-2, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και $f^2(x)-2f(x)+x^2-3=0$, για κάθε $x\in[-2, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής.

β) Αν $f(0)=3$,

i. Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)-1\right)^2=4-x^2$, για κάθε $x\in[-2, 2]$ και κατόπιν ότι

$$f(x)=1+\sqrt{4-x^2},\ x\in[-2, 2].$$

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\text{συν}x$.

23531.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)<0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(f(x)\right)^{2023}}{f(x)-f(x_0)}$.

24760.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-\lambda x,\ x>0$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Αν ισχύει $e-\lambda=e^e-1-\lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή.

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_o\in(1,e)$ με $f'(x_0)=0$.

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$.

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_o}(1-x_o)+1-\ln x_o$.

25745.Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν

$f(1)=1,\ f'(1)=0,\ f(0)=f(2)$ και $\left(f'(x)\right)^2+f(x)f''(x)<0$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι:

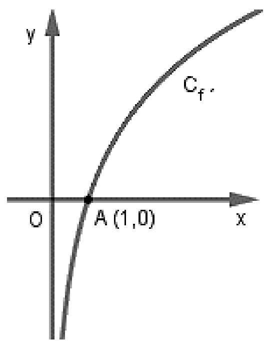
i. $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$

ii. $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

27320.Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.



Δίνεται επίσης ότι η f ΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f.

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

$1^{ον}$: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».
$2^{ον}$: «Υπάρχει μοναδικό $\kappa \in (0,+\infty)$ τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(\kappa, f(\kappa))$ να ισούται με 2».
Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί; Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.
γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της; Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας.

27667. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + 2023, x \in \mathbb{R}$.
α) Να αποδείξετε ότι:
i. η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
ii. το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$.
β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η εξίσωση $e^x + x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ.
γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η συνάρτηση $g(x) = \alpha x - f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho) - f(\rho)$.

31549. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 0$.
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.
δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021, 2022]$ και $[2022, 2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021) + f(2023)$.
Δίνεται $e \simeq 2,71$.

31550. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$. Να αποδείξετε ότι
α) η f είναι κυρτή.
β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ το οποίο είναι μοναδικό.
γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_o} + x_o$.
δ) η εξίσωση $f(x) = 2$ είναι αδύνατη.

Θέμα 3ο

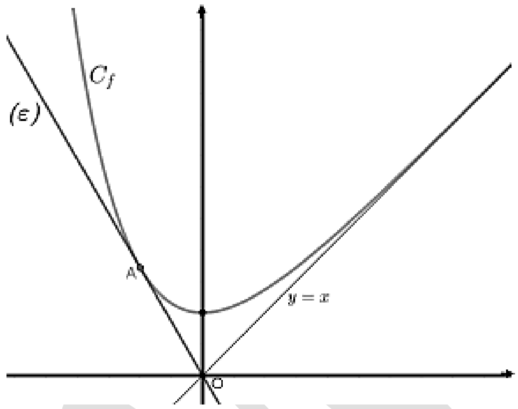
33994. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $\lim_{x \to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right) = 0$.
α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.
γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.
i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $(0, g(0))$.
ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή.

Κανόνες De L' Hospital- Ασύμπτωτες

Θέμα 2ο

23530. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία y = x είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x) - x^2}{f(x)}$.

24755. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0, f(0))$.

25748. Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - 3x\right)$.

β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x) - x}{xf(x) - 3x^2}$.

27084. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

31547. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \dfrac{3 - 2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$.

β) Να εξετάσετε αν η f είναι
i. συνεχής στο 2. **ii.** παραγωγίσιμη στο 2.

33995. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y=x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "$1-1$".

35602. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ με $x\neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε΄): $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

Θέμα 4ο

24759. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x)\geq x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\dfrac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον $f(1)=1$ και $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. **ii.** η f δεν είναι κοίλη.

26631. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x$, $x>0$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς ασύμπτωτες.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\dfrac{x^2+3}{2x^2+1}\right)=2-x^2$.

28314. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x+1}}, & x>1\\ 0, & x=1\end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=-1$.

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

29130.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

ii. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y=x$ τα οποία και να προσδιορίσετε.

β) Για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)-x=\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y=x$.

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f.

31746.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2-4x+6\right)e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της Μ $(0,f(0))$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq 2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

33648.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln^2 x$ και $g(x)=\ln x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f

i. ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f, C_g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

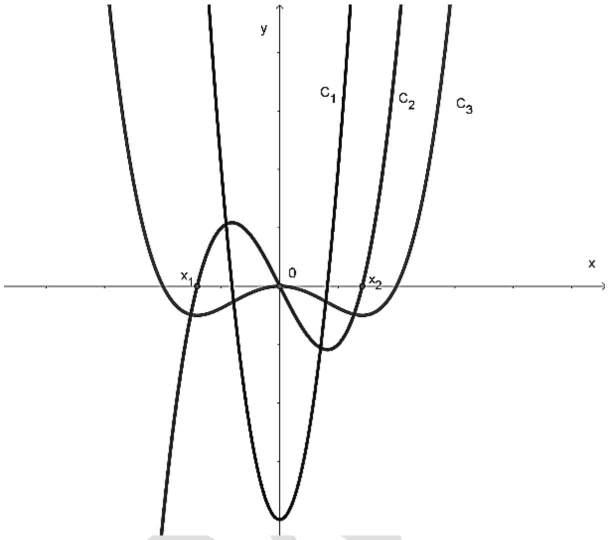
γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g.

ii. Η ευθεία $x=\alpha,\ 1<\alpha<e$ τέμνει τις C_f, C_g στα σημεία Α, Β. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος ΑΒ γίνεται μέγιστο.

Αρχική συνάρτηση

Θέμα 2ο

32694. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2 ,



α) i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2 $+\infty$
$F'=f$	$+$	0 $-$	0 $+$	0 $-$
F				

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F.

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F.

Θέμα 4ο

24769. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$, $x>-1$ και έστω F αρχική της f με $F(1)=\ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$ και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

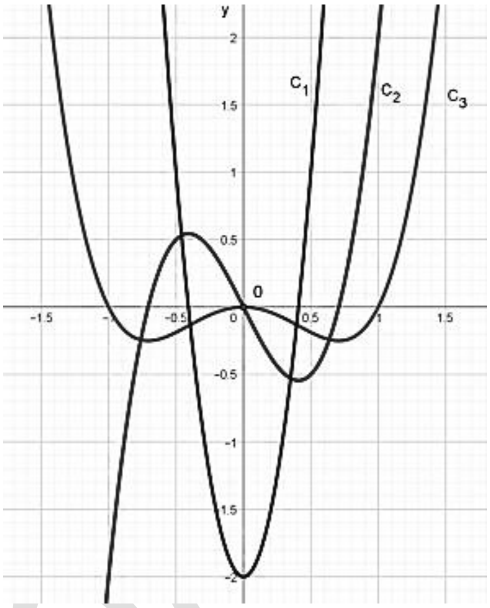
β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$.

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_o=1$.

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\dfrac{2F(x)-1}{x}\geq \ln 4-1$.

Θέμα 3ο

32693. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων $f, f\,'$ και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$.
Δίνεται επίσης ότι οι C_2 και C_3 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η C_2 τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,

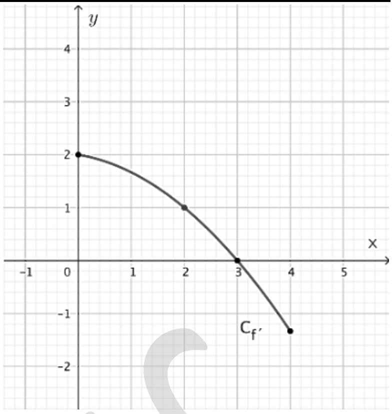


α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προ την μονοτονία και τα ακρότατα.
β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.
γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $f\,'$ και F.

Υπολογιστικά ολοκληρώματα

Θέμα 2ο

26366. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f΄ μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα [0, 4].



α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_0 = 2$;

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 3].

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f''(x)dx$.

Θέμα 4ο

23957. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x} f(x)$.

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1 .

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \dfrac{2\ln x \cdot f(x) + xe^x}{x\left(f(x) + e^x\right)} dx$.

24770. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(e^x - 1\right) + x - 1,\ x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_o = \ln 2$.

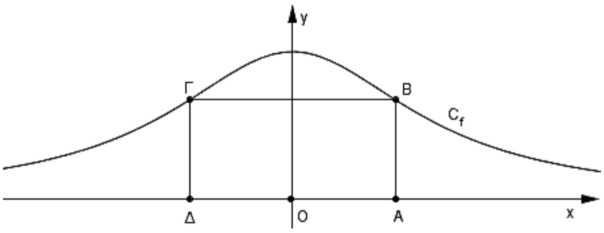
ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln\left(e^x - 1\right) \le 2x - \ln 4$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2 - e^{-x}}{e^{-x} - 1} dx$.

24771. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 1$ και $\left(x^2 + 1\right)f'(x) + \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1},\ x \in \mathbb{R}$.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης $\alpha,\ \alpha > 0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο $E(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{\alpha^2 + 1},\ \alpha > 0$.Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx=\ln\sqrt{2}$.

25766. Στον διπλανό πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−	

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $f(0)=1$ και $f(2)=5$ τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=|x^2-4|+5$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$.

26184. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}},\ x>0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x=e^2$.

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^{e^2} f(x)dx$.

27321. Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.
Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y=f(x)=\alpha x e^{-\beta x},\ x\in(0,+\infty)$ όπου α, β θετικές σταθερές, με $\beta\in(0,1)$ και $\alpha\in(1,+\infty)$.

α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο.
Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y;

β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά.

γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f. Να αποδείξτε ότι $F(\beta)-F(2\beta)=\frac{\alpha}{\beta^2}\cdot\frac{2\beta^2+1-(1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$.

27322. Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση $T(t)=E+(T_0-E)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E<T_0$.
- $T_0=T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα.

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t)=k\left[E-T(t)\right]$.

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 \left(E-T(t)\right)\cdot\ln\left(T(t)\right)dt$ ισούται με $\dfrac{2e^3-3e^4}{k}$ αν είναι $T(0)=e^4$ και $T(1)=e^3$.

29549. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε: $f'(0)=f(0)=0$ και $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$.

β) $f(\pi)=0$.

γ) Στο διάστημα $(0,\pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής.

29837. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, με $x\neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστρόφου.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$.

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f\circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ) Αν $\varphi(x)=(f\circ f)(x)=\dfrac{x-1}{x}$ με $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3\varphi(x)dx$.

33998. Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t=0$. Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες) δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\dfrac{4}{5}dt$.

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t)=5\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\dfrac{4}{5}$, για κάθε $t>0$, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου.

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t)=5\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^t$, $t\in[0,+\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο.

34565. Θεωρούμε τους αριθμούς α, β με $1<\alpha<\beta$ και την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x)>0$, για κάθε $[\alpha,\beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$, με $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)+\lambda\alpha-f(\alpha)}{x}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ ώστε

$cf'(c)-f(c)-\lambda\alpha+f(\alpha)=0$.

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c)\neq\lambda$, να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c,f(c))$ και η ευθεία ΑΒ τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

δ) Αν είναι $\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=e^2$, να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I=\displaystyle\int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}}\frac{x\cdot f'(x^2+1)}{f(x^2+1)}dx$ ισούται με - 1.

Ιδιότητες ολοκληρωμάτων

Θέμα 2ο

33593. Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx=2$, $\int_1^3 f(x)dx=4$ και $\int_1^7 f(x)dx=10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x)dx$.

β) $\int_3^7 f(x)dx$

γ) $\int_7^2 f(x)dx$

δ) $\int_1^3 (f(x)-x)dx$.

Θέμα 4ο

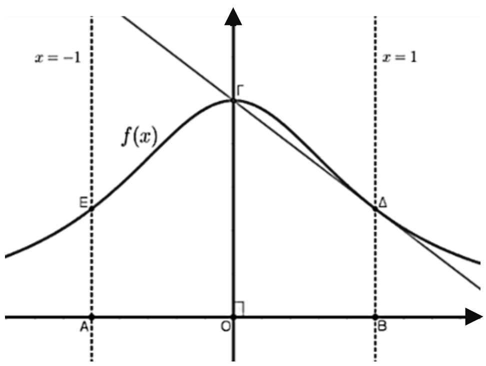
23219. Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1,f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι : **i.** $\int_0^1 f(x)dx>1$. **ii.** $\int_0^1 xf'(x)dx<1$.

23955. Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ και οι ευθείες με εξισώσεις $x=-1$ και $x=1$ οι οποίες τέμνουν τον μεν άξονα x'x στα σημεία Α και Β αντίστοιχα, την δε γραφική παράσταση της f στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο Δ, είναι η ευθεία ΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $[0,1]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία ΓΔ, με εξαίρεση τα κοινά τους σημεία Γ και Δ.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} f(x)dx>\dfrac{3}{2}$.

24758.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x)=(x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$.

β) $f'(1)\ge 0$ και $f'(-1)\le 0$.

γ) η f δεν είναι κοίλη.

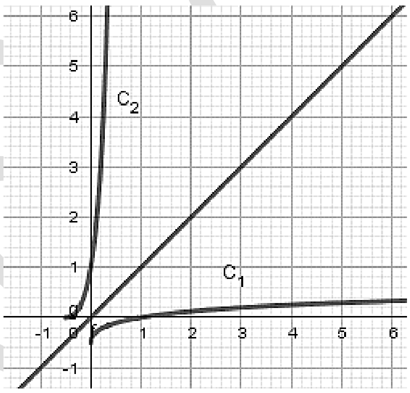
δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx\le 0$.

24131.Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2},\ x\ge 0.$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2. Με δεδομένα ότι



- η μία από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της f και η άλλη στην γραφική παράσταση της f^{-1},
- $\int_{-1/2}^{0}f^{-1}(x)dx=\alpha$

Να βρείτε:

i. Ποια καμπύλη παριστάνει την γραφική παράσταση της f και ποια την γραφική παράσταση της f^{-1},

ii. Το πρόσημο του α καθώς και το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1 f(x)dx$ συναρτήσει του α.

27668.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-\lambda)(x-1),\ x\in\mathbb{R}$ με $1<\lambda<3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)=-f(4-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$.

31551.Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]\\ 1, & x=0\end{cases}$

και $\varphi(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi,\pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in(-\pi,\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa}\varphi(x)dx=0$.

32225.Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x)+x)^2=x^2(x+1)$, για κάθε $x\in[-1,+\infty)$,
- $f(1)>-1$ και $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{2}$.

α) Αν $g(x)=f(x)+x$, $x\in[-1,+\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x)=0$.

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right)$, $x\ge -1$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι $\int_{2023}^{2024}\left(f(x+1)-f(x)\right)dx<\int_{2023}^{2024}\left(f(x+2)-f(x+1)\right)dx$.

33578.α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in[0,\pi]$ ισχύει $e^x+\eta\mu x\ge 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x)=x-\ln\left(e^x+\eta\mu x\right)$, $x\in[0,\pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}{e^x+\eta\mu x}$, $x\in[0,\pi]$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi}xf'(x)dx=\dfrac{\pi}{e^{\pi}}$.

δ) Να αποδείξτε ότι $\int_1^{e}\dfrac{1}{\left(e^x+\eta\mu x\right)\cdot x}dx<1$.

35245.Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης.

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει: $0<f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$.

36816.Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_0=0$ για την οποία ισχύει $xf(x)=\eta\mu x$ για κάθε $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

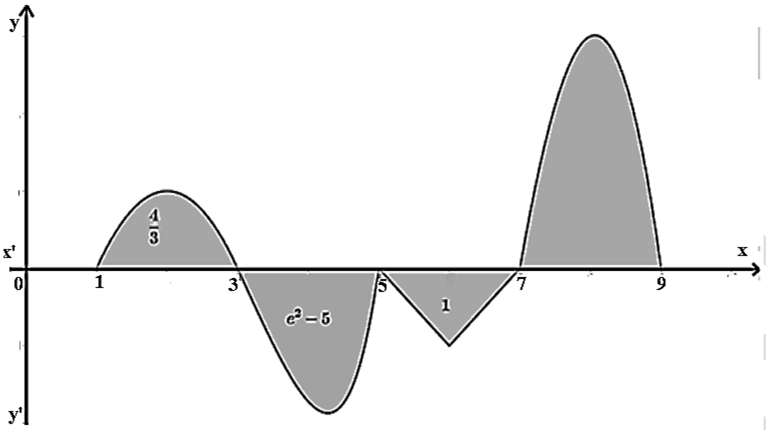
γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

δ) Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx\le\dfrac{1}{4}$.

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Θέμα 2ο

32800. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,9]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,7]$.



Δίνονται ακόμη ότι:

- $\left(\int_7^9 f(x)dx\right)^2 = 16$ και
- η γραφική παράσταση της
f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες $1,\ 3,\ 5,\ 7$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x)dx = 4$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,9]$.

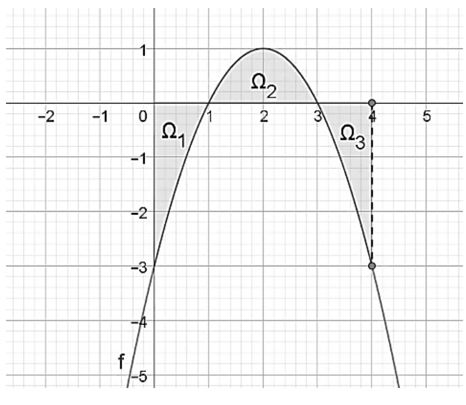
γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x)dx$.

36838. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g.
Αν $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_1^8 f(x)dx = 29$, $\int_3^5 f(x)dx = 8$ και $\int_1^5 g(x)dx = -6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x)dx$ **ii.** $\int_5^8 2f(x)dx$ **iii.** $\int_1^5 (f(x)+g(x))dx$

33588. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = E(\Omega_3) = \frac{4}{3}$.

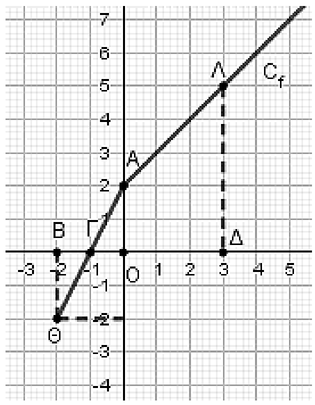


α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x)dx$ **ii.** $\int_0^3 f(x)dx$ **iii.** $\int_0^4 f(x)dx$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx$.

36837.Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή ΘΑΛ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο Α(0,2) και τέμνει τον άξονα x΄x στο Γ(-1,0).



α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$ **ii.** $\int_{-1}^{0} f(x)dx$ **iii.** $\int_{0}^{3} f(x)dx$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-2$ και $x=3$.

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=5$.

36849.Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x\le 0 \\ 1-\text{συν}x, & \text{αν } x>0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , του άξονα x΄x και των ευθειών x = -2 και x = π.

Θέμα 4ο

23218.Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)=x^3+3x^2-\lambda x+1$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η $P(x)$ παρουσιάζει σημείο καμπής για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής Κ.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να προσδιορίσετε το είδος τους.

γ) Έστω ότι $K(-1,\lambda+3)$ και ότι η $P(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στις θέσεις x_1, x_2, με $x_1<-1<x_2$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_P στο σημείο Κ και κατόπιν να αιτιολογήσετε ότι βρίσκεται στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο.

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E_1 που περικλείεται μεταξύ των (ε) , C_P και των ευθειών $x=x_1, x=-1$ είναι ίσο με το εμβαδόν E_2 που περικλείεται μεταξύ των (ε), C_P και των ευθειών $x=x_2$, $x=-1$.

24275.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x+1+\dfrac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι η ευθεία $y=-x+1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ, η οποία είναι μεγαλύτερη του 1.

γ) Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό Ε του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\rho$ ισούται με

$E(\Omega)=-\dfrac{(\rho-1)^2}{2}-(\rho-1)+e^{-1}$ τετραγωνικές μονάδες.

24704. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x}$, $x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει ακριβώς σε ένα σημείο A τον άξονα $x'x$, με τετμημένη $x_0\in(0,1)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=e+(x_0-1)(1-\ln x_0)$.

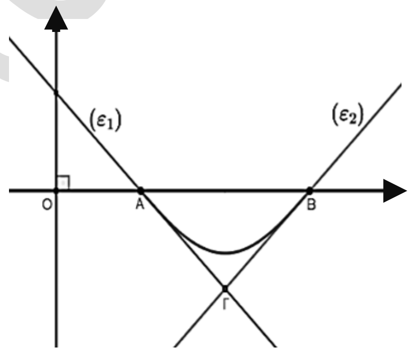
25147. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=e^{-x}$, $g(x)=f(x)\eta\mu x$, $x\in[0,2\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2},e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$.

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f,g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g.

25235. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Στα σημεία $A\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ και $B\left(\frac{3\pi}{2},f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$ έχουν σχεδιασθεί οι εφαπτόμενες (ε_1), (ε_2) αντίστοιχα της γραφικής παράστασης της f, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Γ.



α) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων ευθειών (ε_1), (ε_2) είναι $(\varepsilon_1): y=-x+\frac{\pi}{2}$ και $(\varepsilon_2): y=x-\frac{3\pi}{2}$ αντίστοιχα.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες (ε_1) και (ε_2).

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}\dfrac{1}{f(x)+x-\frac{\pi}{2}}$.

25259. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι τέτοια, ώστε:

- η γραφική παράσταση της f, να εφάπτεται της $\varepsilon: y=\frac{1}{4}$, στο $x_0=0$.
- είναι κυρτή και
- $f(1)=1$.

α) Να αποδειχθεί ότι:

i. $f(0)=\frac{1}{4}$ και $f'(0)=0$. **ii.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f(x)-1}{\eta\mu x\cdot f(x)}=0$.

β) Επιπλέον δίνεται ότι η πρώτη παράγωγος της f είναι συνεχής.

i. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,1]$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό E του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f', τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

25746.Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f'(x)>f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=0$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g(x)=e^{-x}f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και $f(x)<0$ για κάθε $x<0$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|\eta\mu x|+1)=f(|x|+1)$.

δ) Αν E το εμβαδόν που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, να αποδείξετε ότι $E<f(1)$.

25747.Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$ και $f(x)\cdot f'(x)=-x+1$, για κάθε $x\in(0,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f^2(x)=-x^2+2x$ για κάθε $x\in[0,2]$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$ για κάθε $x\in[0,2]$.

γ) Αφού αιτιολογήσετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο με κέντρο Κ(1,0) και ακτίνα 1, να τη σχεδιάσετε σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$.

25757.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(1-x)\eta\mu^2\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & \text{αν } 0\le x<1\\ 0, & \text{αν } x=1\end{cases}$

α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

β) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in[0,1]$, ισχύει $0\le f(x)\le 1-x$.

γ) Να αποδειχθεί ότι για το εμβαδό E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0,\ x=1$ ισχύει $E<\dfrac{1}{2}$ τετραγωνικές μονάδες.

25765.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\ln x+x,\ x>0$

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x)>x$.

γ) Έστω $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(x)=e^{f(|x|)}$ για κάθε $x\neq 0$.

i.Να αποδείξετε ότι $g(x)=x^2e^{|x|},\ x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g, τον $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x=-1,\ x=1$.

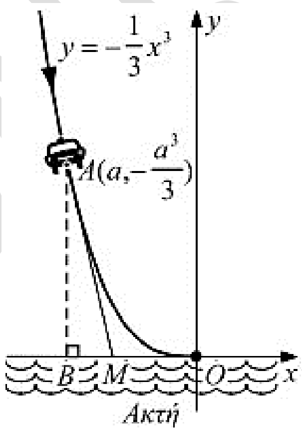
26183.Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases} εφ\left(\dfrac{\pi x}{4}\right), 0\le x\le 1 \\ 1-\dfrac{4\ln x}{x},\ x>1 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=\dfrac{\ln 4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες.

27031.Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{3}x^3$, με $x\in\left(-\infty,0\right]$ και τυχαίο σημείο $A\left(\alpha,-\dfrac{\alpha^3}{3}\right)$ με $\alpha<0$ της γραφικής της παράστασης.



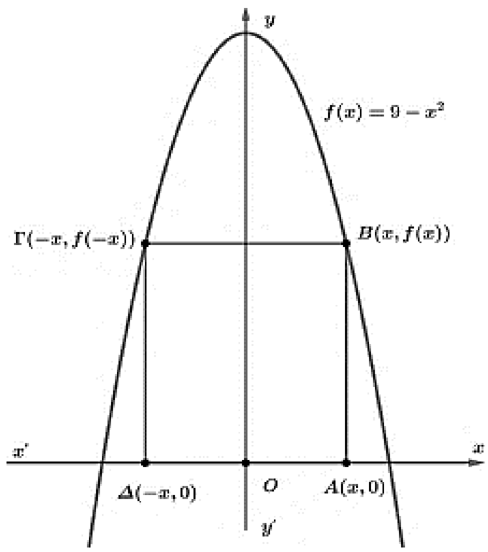
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α.

β) i. Ένα περιπολικό Α κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=-\dfrac{1}{3}x^3,\ x\le 0$ πλησιάζοντας την ακτή και ο προβολέας του φωτίζει κατευθείαν εμπρός (όπως φαίνεται στο σχήμα).
Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του περιπολικού δίνεται από τον τύπο $\alpha'\left(t\right)=-\alpha\left(t\right)$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ της ακτής, στο οποίο πέφτουν τα φώτα του προβολέα τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το περιπολικό έχει τετμημένη -3.

ii. Να ερμηνεύσετε το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ.

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη -3.

27408.Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f\left(x\right)=9-x^2$. Μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης και του οριζόντιου άξονα $x'x$ είναι εγγεγραμμένο το ορθογώνιο ΑΒΓΔ.
Οι κορυφές Α(x,0) και Δ(-x,0) είναι σημεία του άξονα x′x, ενώ οι κορυφές $B\left(x,f\left(x\right)\right)$ και $\Gamma\left(-x,f\left(-x\right)\right)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του $x\in\left[0,3\right]$ δίνεται από την συνάρτηση $E\left(x\right)=18x-2x^3$.

β) Να μελετηθεί η συνάρτηση $E\left(x\right)$ ως προς την μονοτονία.

γ) Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε αυτό να έχει το μέγιστο εμβαδό, και να αποδείξετε ότι αυτό ισούται με $12\sqrt{3}$ τετραγωνικές μονάδες.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , του άξονα $x'x$ και είναι εξωτερικό του ορθογωνίου ΑΒΓΔ όταν το εμβαδό του παίρνει την μέγιστη τιμή του.

28476.Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: ℝ → ℝ για την οποία ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)(x-1)}{\ln x}=0$ και $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$.

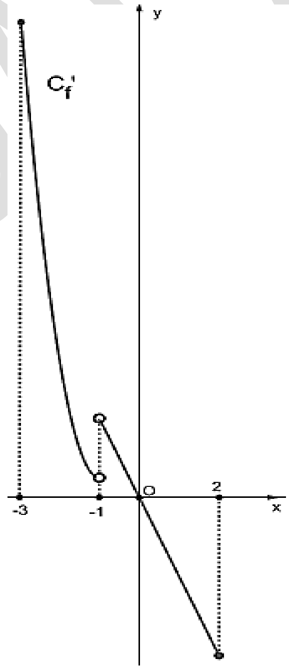
ii. Να αποδείξετε ότι $f(1)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ε, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x=0$ και $x=1$.

28870.Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [-3,2], η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f,η $C_{f'}$ που στο διάστημα (-1,2] είναι ευθύγραμμο τμήμα.



α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f, αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους.

γ) Αν η f ΄ είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx=-4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$.

29645. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}-3x^2+1, & x<0\\ -x^3+3x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1,x_2 με $x_1<0$ και $x_2>3$.

β) i. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1,x_2]$ με x_1,x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α).

ii. Να βρείτε όλα τα $\xi\in(x_1,x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$.

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία ε και την ευθεία x=0.

29646.Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=-x^3+3x^2+1,\ x\geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει στο $x_1=0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2=2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1,f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

ii. Τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $\Gamma(x_3,f(x_3))$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία.

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας ε και του άξονα y΄y.

31148.Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=e^{-x}$ με $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x)\ge g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x,f(x))$ και $\Gamma(x,g(x))$ με $x>0$. Η παράλληλη ευθεία από το Β προς τον άξονα x΄x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα x΄x τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Ζ.

i. Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΖΔ είναι $E(x)=\dfrac{x^3}{e^x}$, $x>0$.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{f(x)-g(x)}{x}$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\ln 2$ και $x=1$, είναι $\ln\sqrt{2e}-\dfrac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες.

31149.Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(1+f(x))-\ln(f(x))>f^2(x)\cdot f(\ln 2)$.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f,τις ευθείες με εξισώσεις $x=\dfrac{1}{2}$, $x=1$ και τον άξονα x'x είναι $\ln\left(\dfrac{27}{4e}\right)$.

31530.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

α) **i.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα (0, 1).

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5}$, αν x_o είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός.

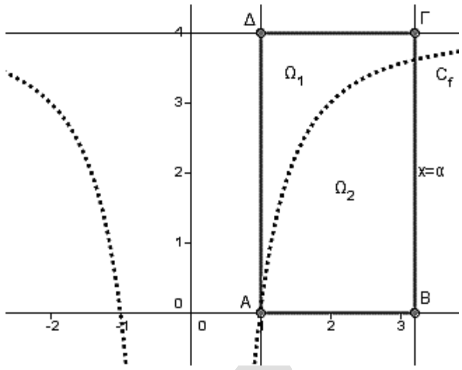
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της στο σημείο A(1, 4) και την κατακόρυφη ευθεία $x=2$.

31533.Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4-\dfrac{4}{x^2}$, $x\neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f.

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1 x_2 = -4$.

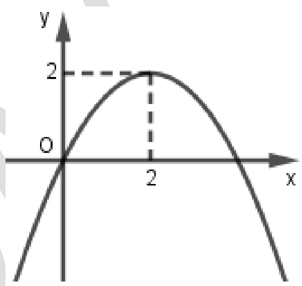
γ) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$, $\alpha>1$ και $y=4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2.



i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$.

31534. Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο $K(2, 2)$ και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.



α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x,\ x\in\mathbb{R}$.

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 1), να αποδείξετε ότι $f(x) = -\dfrac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$.

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x>0$.

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x=0$ και $x=\pi$.

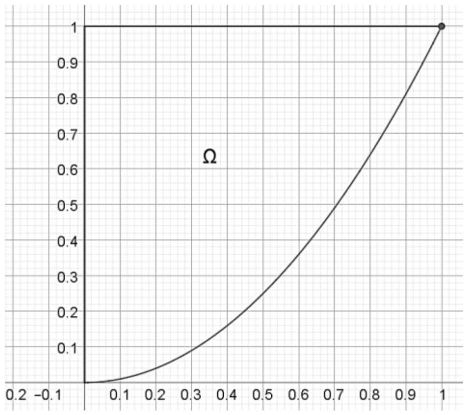
31792. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1, & -1 \le x < 1 \\ 1 + \dfrac{(\ln x)^2}{x}, & x \ge 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x), g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=e$.

33598. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y=1$ και τη γραφική παράσταση της f.



α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}.

β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1}.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx < \dfrac{1}{2}$.

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$.

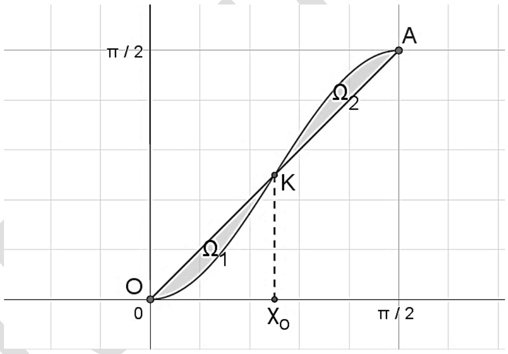
ii. $E(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $E(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω.

33634.Έστω $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} ημ^2 x dx$ και $J = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} συν^2 x dx$.

α) Να αποδείξετε ότι $I + J = \frac{\pi^2}{4}$.

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u = \frac{\pi}{2} - x$ να αποδείξετε ότι $I = J$ και κατόπιν ότι $I = J = \frac{\pi^2}{8}$.

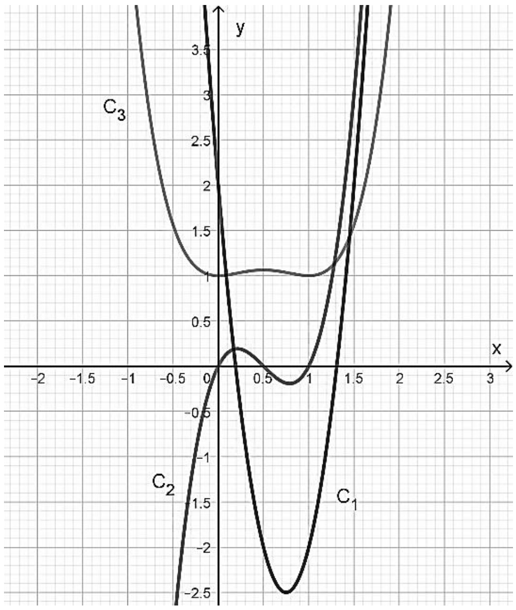
γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = \frac{\pi}{2}ημ^2 x$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία ΟΑ τέμνει τη C_f στα σημεία $O(0,0)$, $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $K(x_o, f(x_o))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1, Ω_2. Να αποδείξετε ότι :



i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα yy' και της ευθείας $y = \frac{\pi}{2}$ είναι το J .

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 είναι ίσα .

34151.Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f , f ΄και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο με τεταγμένη 1 ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}, 1$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προ την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F.

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f ΄ και F.

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

34566. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\ \beta]\to\mathbb{R}$, με $\alpha>0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\ \beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- $\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx=-\ln 2$.
- $\alpha f^2(\alpha)=\beta f^2(\beta)$.
- $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf^2(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι ln4 τετραγωνικές μονάδες.

γ) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$.

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(\alpha,\beta]$ ισχύει $\dfrac{G(x)-G(\alpha)}{x-\alpha}<f(\alpha)$.

35244. Δίνεται η συνάρτηση με $f(x)=\varepsilon\varphi x-1$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x=(1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση στο ανοικτό διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

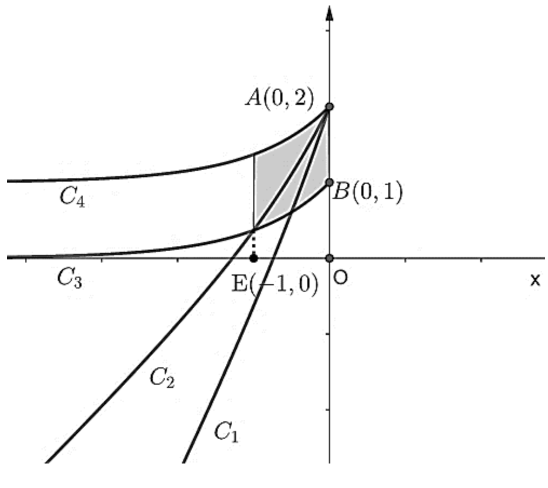
β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$.

35302. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h με $f(x)=e^x$, $g(x)=e^x+1$ και $h(x)=e^x+x+1$, $x\in(-\infty,0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3 και C_4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g, και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3 και C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας.



γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες , C_3 C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία.