16η Άσκηση

Έως κανόνες παραγώγισης.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

- $f(x) > 0$ και
- $\ln f(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να δείξετε ότι $f(1) = 1$
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
δ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln f(f(x)) + f(f(x)) = x$
ε) Να δείξετε ότι $1 < f(e) < e$.
στ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.
ζ) Κάνοντας κατάλληλη γραφική παράσταση να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.
Στη συνέχεια να βρείτε διάστημα πλάτους 1/2 στο οποίο να περιέχεται η ρίζα.
η) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)(f(x) - e) = -x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, e)$.
θ) Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{f(x)-1}$ **ii.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f^{-1}(x^2+2) - f^{-1}(x^2+1) \right]$

ι) Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} f''(x) = 0$.

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) 1ος τρόπος (άτοπο)

Έστω ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) \geq f(x_2)$, τότε $\ln f(x_1) \geq \ln f(x_2)$ και με πρόσθεση κατά μέλη: $\ln f(x_1) + f(x_1) \geq \ln f(x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$ άτοπο. Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2ος τρόπος

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\ln f(x_1) + f(x_1) < \ln f(x_2) + f(x_2)$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln x + x,\ x > 0$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $\ln x_1 < \ln x_2$ και με πρόσθεση κατά μέλη: $\ln x_1 + x_1 < \ln x_2 + x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow g \nearrow (0, +\infty)$.

Η (1) γίνεται: $g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f \nearrow \mathbb{R}$

β) Για $x = 1$ είναι $\ln f(1) + f(1) = 1 \Leftrightarrow g(f(1)) = g(1) \overset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 1$

γ) Έστω ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = k \in (0, +\infty)$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln f(x) + f(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x \Leftrightarrow \ln k + k = +\infty$ άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln f(x) + f(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} x \Leftrightarrow -\infty + 0 = +\infty$ άτοπο, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = k \in (0, +\infty)$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln f(x) + f(x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} x \Leftrightarrow \ln k + k = -\infty$ άτοπο.

Έστω ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln f(x) + f(x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} x \Leftrightarrow +\infty + \infty = -\infty$ άτοπο.

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}(\ln f(x) + f(x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} x \Leftrightarrow -\infty + 0 = -\infty$ δεκτό. Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

δ) Αν στη σχέση $\ln f(x) + f(x) = x$ αντικαταστήσουμε όπου x το $f(x)$, προκύπτει:

$\ln f(f(x)) + f(f(x)) = f(x)$, οπότε:

$\ln f(f(x)) + f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x) = x$ (2)

Έστω $\rho \in \mathbb{R}$ ρίζα της (2), δηλαδή $f(\rho) = \rho$, τότε για $x = \rho$ είναι:

$\ln f(\rho) + f(\rho) = \rho \Leftrightarrow \ln \rho + \cancel{\rho} = \cancel{\rho} \Leftrightarrow \ln \rho = 0 \Leftrightarrow \rho = 1$, οπότε μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x = 1$.

ε) Είναι $1 < e \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(1) < f(e) \Leftrightarrow 1 < f(e)$.

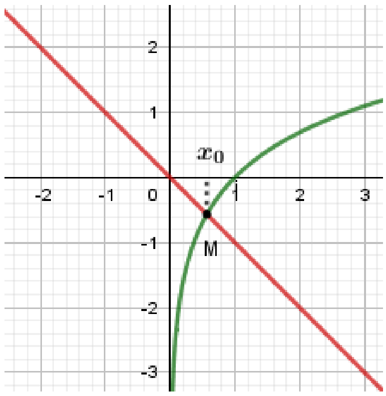
Θα αναζητήσουμε την τιμή του x για την οποία $f(x) = e$.

Έστω ότι $f(a) = e$, τότε για $x = a$ είναι $\ln f(a) + f(a) = a \Leftrightarrow \ln e + e = a \Leftrightarrow a = e + 1$, άρα $f(e+1) = e$.

Είναι $e < e + 1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(e) < f(e+1) = e$.

στ) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, είναι 1-1 και αντιστρέφεται με $D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

Θέτουμε $f(x) = y$ και έχουμε $\ln y + y = x$, άρα $f^{-1}(y) = \ln y + y,\ y > 0$, οπότε $f^{-1}(x) = \ln x + x,\ x > 0$.



ζ) $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow \ln x + x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -x$, οπότε η ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x)=0$ είναι η τετμημένη του κοινού σημείου των γραφικών παραστάσεων των $y=\ln x$ και $y=-x$

Παρατηρούμε στο σχήμα ότι το x_0 είναι κοντά στο 1/2, γι αυτό τα διαστήματα στα οποία θα «ψάξουμε» για το x_0 είναι τα $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Είναι $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=-\ln 2+\frac{1}{2}=\frac{1-2\ln 2}{2}=\frac{\ln e-\ln 4}{2}<0$ και $f^{-1}(1)=1$, οπότε $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)f^{-1}(1)<0$ και επειδή η f^{-1} είναι συνεχής ως άθροισμα βασικών συναρτήσεων, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $f^{-1}(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Επειδή η $f^{-1}=g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της $f^{-1}(x)=0$, οπότε $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

η) $f(x)\left(f(x)-e\right)=-x \Leftrightarrow f^2(x)-ef(x)+x=0$

Έστω $h(x)=f^2(x)-ef(x)+x,\ x\in[1,e]$.

Η h είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$h(1)=f^2(1)-ef(1)+1=1-e+1=2-e<0$, $h(e)=f^2(e)-ef(e)+e$

Το τριώνυμο $f^2(e)-ef(e)+e$ έχει διακρίνουσα $\Delta=e^2-4e=e(e-4)<0$, οπότε $h(e)=f^2(e)-ef(e)+e>0$. Επειδή $h(1)h(e)<0$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, η εξίσωση $h(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)-ef(x)+x=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(1,e)$.

θ) i. Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$, είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)-1}=\lim_{y\to 1}\frac{f^{-1}(y)-1}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(1)}{y-1}=\left(f^{-1}\right)'(1)$$

Η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{x}+1$, οπότε $\left(f^{-1}\right)'(1)=2$

ii. $$\lim_{x\to+\infty}\left[f^{-1}(x^2+2)-f^{-1}(x^2+1)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+2)+\cancel{x^2}+2-\ln(x^2+1)-\cancel{x^2}-1\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}+1\right]=1 \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1 \text{ και } \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x^2+2}{x^2+1}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 1}}{\overset{\frac{x^2+2}{x^2+1}=u}{=}}\lim_{u\to 1}\ln u=0$$

ι) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $\ln f(x)+f(x)$ είναι παραγωγίσιμη, οπότε

$$\left(\ln f(x)+f(x)\right)'=(x)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}+f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)+f(x)f'(x)=f(x) \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\left(1+f(x)\right)=f(x)\Leftrightarrow f'(x)=\frac{f(x)}{1+f(x)}\quad(1)$$

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\left(f'(x)\right)'=\left(\frac{f(x)}{1+f(x)}\right)'\Leftrightarrow f''(x)=\frac{f'(x)\left(1+f(x)\right)-f(x)f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}=\frac{f'(x)}{\left(1+f(x)\right)^2}\overset{(1)}{=}\frac{\frac{f(x)}{1+f(x)}}{\left(1+f(x)\right)^2}=\frac{f(x)}{\left(1+f(x)\right)^3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f''(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\left(1+f(x)\right)^3}\underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to+\infty}}{\overset{f(x)=u}{=}}\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{(1+u)^3}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u}{u^3+3u^2+3u+1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\cancel{u}}{u^{\cancel{3}2}}=0$$