

28η Άσκηση

Έως κυρτότητα

Δίνεται συνάρτηση f με συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[0,1]$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $f'(x) \geq 2x$ για κάθε $x \in [0,1]$.
- $f(1) = 2$
- $f(0) = 1$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε: $2f(x_0) = f(0,1) + f(0,01)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2e^x - x - 2$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$.

δ) Έστω επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο $[0, +\infty)$

εκτός του σημείου επαφής τους και $f'(x) \geq 2x$ για κάθε $x \geq 0$. Να δείξετε ότι:

- η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$
- $f(x) - xf'(x) \leq 1 \leq f(x)$ για κάθε $x \geq 0$.
- $(x+1)(f(x)-1) < x(f(x+1)-1)$ για κάθε $x > 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Λύση

α) $f'(x) \geq 2x > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [1, 2]$$

β) Έστω $g(x) = 2f(x) - f(0,1) - f(0,01)$, $x \in [0,1]$.

$$\text{Είναι } 0 < 0,01 < 0,1 < 1 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(0) < f(0,01) < f(0,1) < f(1)$$

$$\text{Είναι } g(0) = 2f(0) - f(0,1) - f(0,01) = (f(0) - f(0,1)) + (f(0) - f(0,01)) < 0 \text{ και}$$

$$g(1) = 2f(1) - f(0,1) - f(0,01) = (f(1) - f(0,1)) + (f(1) - f(0,01)) > 0, \text{ δηλαδή}$$

$$g(0)g(1) < 0. \text{ Επειδή η } g \text{ είναι συνεχής στο } [0,1], \text{ λόγω του } \Theta.\text{Bolzano, υπάρχει } x_0 \in (0,1) \text{ τέτοιο,}$$

$$\text{ώστε: } g(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2f(x_0) = f(0,1) + f(0,01)$$

γ) Έστω $g(x) = f(x) - 2e^x + x + 2 = x^2 + 3 - 2e^x + x$, $x \in [0,1]$.

Είναι $g(0) = 1 > 0$, $g(1) = 5 - 2e < 0$ δηλαδή $g(0)g(1) < 0$ και επειδή η g είναι συνεχής, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ με $g'(x) = 2x - 2e^x + 1$ και $g''(x) = 2 - 2e^x$.

$$0 < x < 1 \Leftrightarrow 1 < e^x < e \Leftrightarrow -2 > -2e^x > -2e \Leftrightarrow 2 - 2e < 2 - 2e^x < 0 \Rightarrow g'' < 0 \text{ στο } [0,1].$$

Για κάθε $0 < x < 1$ είναι $g'(0) > g'(x) > g'(1) \Rightarrow g'(x) < -1 < 0 \Rightarrow g \searrow$ στο $[0,1]$, οπότε η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

δ) i. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι $f'(x_1) < f'(x_2)$.

Θεωρούμε τις εφαπτόμενες της C_f στα x_1, x_2 .

$$e_1: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1) \Leftrightarrow y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \text{ και}$$

$$e_2: y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2) \Leftrightarrow y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2)$$

Επειδή η C_f βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της εκτός του σημείου επαφής τους, ισχύει ότι

$$f(x) \geq f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \quad (1) \text{ και } f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2) \quad (2)$$

$$\text{Η (1) για } x = x_2 \text{ γίνεται: } f(x_2) > f'(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(x_1) \quad (3)$$

$$\text{Η (2) για } x = x_1 \text{ γίνεται: } f(x_1) > f'(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow$$

$$f(x_1) - f(x_2) > f'(x_2)(x_1 - x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < f'(x_2) \Leftrightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < f'(x_2) \quad (4)$$

$$\text{Από τις (3),(4) } \Rightarrow f'(x_1) < f'(x_2) \Leftrightarrow f' \nearrow [0, +\infty) \Leftrightarrow f \cup [0, +\infty)$$

ii. Για $x > 0$ παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα. Έστω $x > 0$.

Για την f εφαρμόζεται το $\Theta.\text{M.T.}$ στο $[0, x]$, οπότε υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{f(x) - 1}{x}$$

$$\text{Είναι } 0 < \xi < x \stackrel{f \cup \Rightarrow f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(0) < \frac{f(x) - 1}{x} < f'(x) .$$

$$\text{Είναι } \frac{f(x) - 1}{x} > f'(0) \geq 2 \cdot 0 = 0 \stackrel{x > 0}{\Rightarrow} f(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 1 \quad (1) \text{ και}$$

$$\frac{f(x) - 1}{x} < f'(x) \Leftrightarrow f(x) - 1 < xf'(x) \Leftrightarrow f(x) - xf'(x) < 1 \quad (2).$$

Από τις (1),(2) $\Rightarrow f(x) - xf'(x) < 1 < f(x)$. Τελικά για κάθε $x \geq 0$ είναι $f(x) - xf'(x) \leq 1 \leq f(x)$

$$\text{iii. } (x+1)(f(x)-1) < x(f(x+1)-1) \Leftrightarrow \frac{f(x)-1}{x} < \frac{f(x+1)-1}{x+1}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)-1}{x}$, $x > 0$. Είναι $g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x) + 1}{x^2}$.

Όμως για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) - xf'(x) < 1 \Leftrightarrow 0 < f'(x)x - f(x) + 1$, άρα $g'(x) > 0 \Rightarrow g \nearrow (0, +\infty)$.

$$\text{Είναι } 0 < x < x+1 \stackrel{g \nearrow (0, +\infty)}{\Leftrightarrow} g(x) < g(x+1) \Leftrightarrow \frac{f(x)-1}{x} < \frac{f(x+1)-1}{x+1} .$$

iv. Η εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$ έχει εξίσωση $y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = f'(1)x - f'(1) + 1$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της στο διάστημα αυτό εκτός του σημείου επαφής τους, άρα: $f(x) \geq f'(1)x - f'(1) + 1$ (3) για κάθε $x \geq 0$.

Από τη σχέση $f'(x) \geq 2x$ για $x=1$ προκύπτει ότι $f'(1) \geq 2 > 0$, οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(1)x - f'(1) + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(1)x = +\infty , \text{ οπότε λόγω της (3) είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$