ΕΒΔΟΜΗ ΒΑΛΚΑΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ JBMO

(ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΚΑΤΩ ΤΩΝ 15,5 ΕΤΩΝ) - ΣΜΥΡΝΗ

Ιούνιος 2003

Επιμέλεια: Ευθύβουλος Λιασίδης – Ανδρέας Σαββίδης

Να λυθούν όλα τα προβλήματα Χρόνος: 4 ½ Ώρες

Πρόβλημα 1. Ένας n θετικός ακέραιος. Ένας αριθμός Α έχει 2n ψηφία, από τα οποία είναι το 4 και ένας αριθμός Β έχει n καθένα από τα οποία είναι το 8. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός Α + 2Β + 4 είναι τέλειο τετράγωνο.

Πρόβλημα 2. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n σημεία ενός επιπέδου, ανά τρία μη συνευθειακά, με την ακόλουθη ιδιότητα: αν τα ονομάσουμε A_1, A_2, . . . A_n, με οποιαδήποτε σειρά, η τεθλασμένη γραμμή A_1 A_2 . . . A_n δεν τέμνει τον εαυτό της. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή πουν μπορεί να πάρει αριθμός n.

Πρόβλημα 3. Έστω κ ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC. Θεωρούμε τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ έτσι ώστε $C \notin \overset{\frown}{AB}$, $A \notin \overset{\frown}{BC}$ και $B \notin \overset{\frown}{CA}$. Έστω D, E και F τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ και $\overset{\frown}{AB}$, αντίστοιχα. Έστω G και H τα σημεία τομής DE με τις CB και CA, αντίστοιχα και I, J τα σημεία τομής της DF με τις BC και BA αντίστοιχα. Συμβολίζουμε τα μέσα των GH και IJ με M και N, αντίστοιχα.

α) Να βρείτε τις γωνιές του τριγώνου DMN συναρτήσει των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ

β) Αν O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τρίγωνου DMN και P είναι το σημείο τομής των AD και EF να αποδείξετε ότι τα σημεία O, P, M και N βρίσκονται πάνω στον ίδιο κύκλο.

Πρόβλημα 4. Αν οι x, y, z είναι πραγματικοί μεγαλύτεροι του -1, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1+\chi^2}{1+\psi+\omega^2}+\frac{1+\psi^2}{1+\omega+\chi^2}+\frac{1+\omega^2}{1+\chi+\psi^2}\geq 2$$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1. Οι αριθμοί Α και Β γράφονται ως εξής:

$$A = 4\cdot(10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10+1) = 4\cdot\frac{10^{2n}-1}{10-1}$$

$$B = 8\cdot(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) = 8\cdot\frac{10^n - 1}{10-1}$$

Τότε η παράσταση Α+2Β+4 γίνεται,

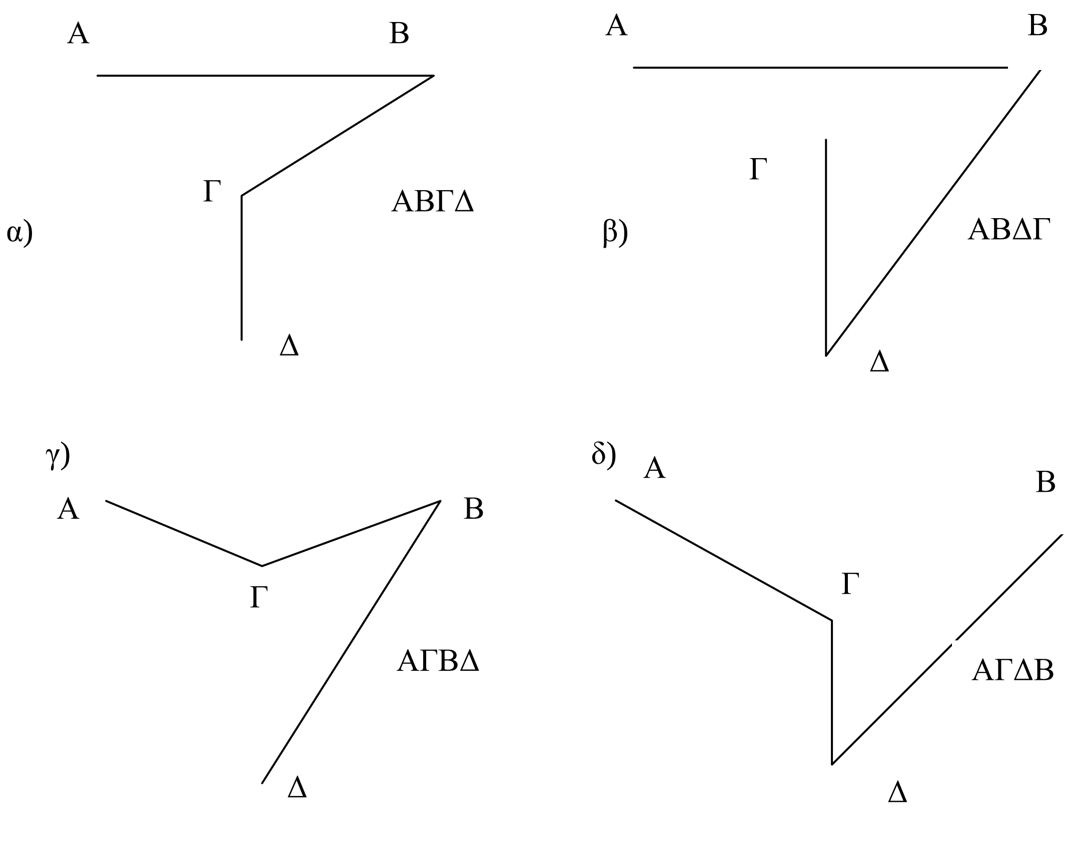
$$A + 2B + 4 = \frac{4}{9}\cdot(10^{2n} - 1) + \frac{16}{9}\cdot(10^n - 1) + 4 = \frac{4}{9}\cdot(10^{2n} - 1 + 4\cdot 10^n - 4 + 9)$$

$$= \frac{4}{9}\cdot(10^{2n} + 4\cdot 10^n + 4) = \frac{4}{9}(10^n + 2)^2 = \left[\frac{2}{3}(10^n + 2)\right]^2$$

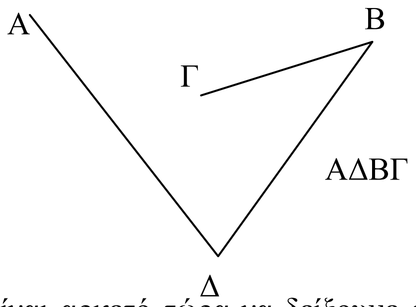
Πρόβλημα 2. Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται για 3 μη συνευθειακά σημεία. Αν στο επίπεδο των τριών σημείων ορίσουμε και τέταρτο σημείο θα έχουμε τις εξής περιπτώσεις:

Ι) Τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Τότε όμως οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ θα τέμνονται, αυτό όμως αντίκειται στην υπόθεση.

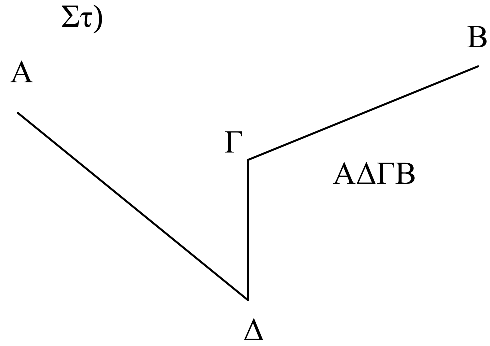
ΙΙ) Τα τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι κορυφές μη κυρτού τετραπλεύρου. Τότε μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι συνθήκες του προβλήματος ικανοποιούνται με όποια σειρά και αν φέρουμε την τεθλασμένη γραμμή που συνδέει τα 4 σημεία.



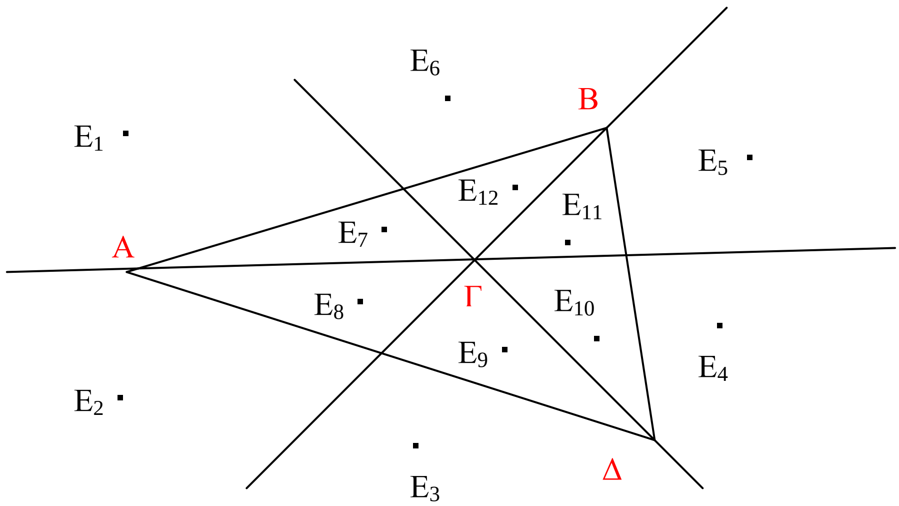
ε)



Στ)



Είναι αρκετό τώρα να δείξουμε ότι αν έχουμε πέντε σημεία στο ίδιο επίπεδο τότε τα τέσσερα θα είναι κορυφές κυρτού τετραπλεύρου οπότε σύμφωνα με την παρατήρηση (Ι) δεν θα ικανοποιούνται οι συνθήκες του προβλήματος. Στο εσωτερικό τριγώνου ΑΔΒ λαμβάνουμε σημείο Γ και φέρουμε τις ευθείες ΑΓ, ΒΓ και ΔΓ



Ένα πέμπτο σημείο Ε μπορεί να ορισθεί σε μια από τις 12 περιοχές που έχει χωρισθεί το επίπεδο του τριγώνου ΑΔΒ. Τότε θα έχουμε τα ακόλουθα 12 κυρτά τετράπλευρα E_1ΑΓΒ, E_2ΔΓΑ, E_3ΔΓΑ, E_4ΒΓΔ, E_5ΒΓΔ, E_6ΑΓΒ, E_7ΑΔΓ, E_8ΓΒΑ, E_9ΔΒΓ, E_{10}ΓΑΔ, E_{11}ΒΑΓ, E_{12}ΓΔΒ. Επομένως το n δεν μπορεί να πάρει μεγαλύτερη τιμή από το 4.

<u>Πρόβλημα 3.</u>

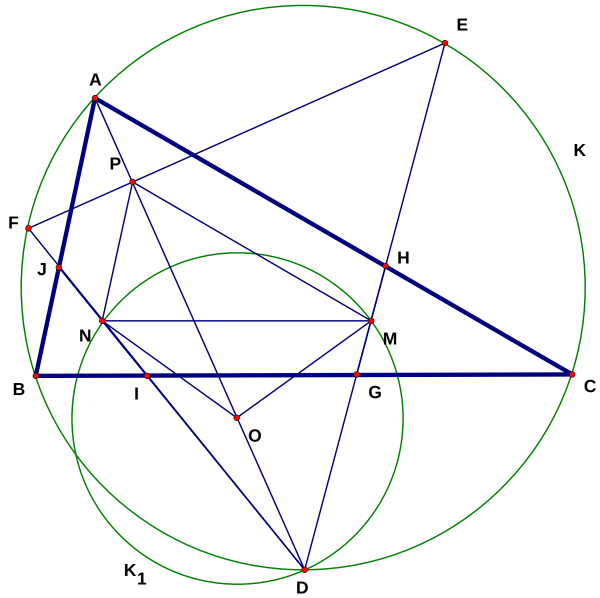
Στη λύση $(BD),(\hat{A})$....... φανερώνει το μέτρο του τόξου ή της γωνίας ….

α) Έχουμε $(BD)=(DC)=(\hat{A}),\quad (CE)=(EA)=(\hat{B}),\quad (AF)=(FB)=(\hat{C}) \Rightarrow$

$$(\widehat{EDF})=\frac{1}{2}\cdot(\hat{B}+\hat{C})=\frac{1}{2}(180-\hat{A})=90-(\frac{\hat{A}}{2})\quad (\widehat{FED})=90-(\frac{\hat{B}}{2}),\quad (\widehat{DFE})=90-\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$$

Επίσης $\widehat{EHA}=\widehat{HDA}+\widehat{HAD}$. (εξωτερική γωνιά του τριγώνου ADH).

$\Rightarrow (\widehat{EHA})=\frac{1}{2}\cdot(AE+CD)=\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B})=\frac{1}{2}(BD+CE)=(\widehat{CZE})$. Άρα το τρίγωνο CHZ είναι ισοσκελές . ($CH=CZ$)



Εφ΄όσον CF διχοτόμος της γωνιάς C το μέσο M της HZ βρίσκεται πάνω στη CF. Είναι δε $CM \perp HZ$. Άρα $(\widehat{EMF}) = 90°$. Κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο θα Έχουμε $(\widehat{FNE}) = 90^0$. Έτσι τα σημεία E, F, N, M βρίσκονται πάνω σε κύκλο Κ, με διάμετρο EF. Άρα $(\widehat{DNM}) = (\widehat{DEF}) = 90^0 - (\frac{\hat{B}}{2})$ και $(\widehat{DMN}) = (\widehat{DFE}) = 90^0 - (\frac{\hat{C}}{2})$ (εξωτερικές γωνιές του εγγεγραμμένου $EFNM$)

β) Έχουμε $AB \cap EF = K$ και $AC \cap EF = L$. Όπως προηγουμένως στο μέρος (α) θα έχουμε: $(\widehat{APK}) = (\widehat{APL}) = 90^0$ και $(\widehat{FPN}) = 90^0 - (\frac{\hat{A}}{2})$, $(\widehat{EPM}) = 90^0 - (\frac{A}{2})$. Άλλα $(\widehat{AKP}) = (\widehat{ALP}) = 90 - (\frac{\hat{A}}{2})$. Έτσι ΑΓ//PM και AB//PN άρα $(\widehat{MPN}) = (\widehat{BAC}) = (\hat{A})$.

Το τρίγωνο DMN είναι οξυγώνιο και έτσι το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου περί αυτό κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό του. $(\widehat{MDN}) = 90^0 - (\frac{\hat{A}}{2}) \Rightarrow (\widehat{MON}) = 180^0 - (\hat{A})$ άρα $(\widehat{MON}) + (\widehat{MPN}) = 180°$. Επομένως το τετράπλευρο $OMPN$ είναι εγγράψιμο σε κύ-κλο.

<u>Πρόβλημα 4.</u>

Έχουμε

$$(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{y^2+1}{2} \Rightarrow \frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{1+x^2}{1+z^2+\frac{1+y^2}{2}}$$

$$\text{Άρα } \frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{1+y^2}{1+x^2+\frac{1+z^2}{2}} \Rightarrow \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{1+z^2}{1+y^2+\frac{1+x^2}{2}}.$$

Θέτουμε $a = 1 + x^2$, $\beta = 1 + y^2$, $\gamma = 1 + z^2$ και η προς απόδειξη σχέση γίνεται:

$$\frac{\alpha}{\gamma+\frac{\beta}{2}} + \frac{\beta}{\alpha+\frac{\gamma}{2}} + \frac{\gamma}{\beta+\frac{\alpha}{2}} \geq 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{2\gamma+\beta} + \frac{\beta}{2\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{2\beta+\alpha} \geq 1 \ldots (1) \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

Θέτουμε Α = 2γ + β, Β = 2α + γ, Γ = 2β + α.

Τότε $\alpha = \frac{\Gamma + 4\mathrm{B} - 2\mathrm{A}}{9}$, $\beta = \frac{\mathrm{A} + 4\Gamma - 2\mathrm{B}}{9}$, $\gamma = \frac{\mathrm{B} + 4\mathrm{A} - 2\Gamma}{9}$ και η (1) γίνεται:

$$\frac{\Gamma+4\mathrm{B}-2\mathrm{A}}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{A}+4\Gamma-2\mathrm{B}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}+4\mathrm{A}-2\Gamma}{\Gamma} \geq 9 \Rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} + 4\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{\Gamma}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right) \geq 15,$$

$$\text{Αλλά } \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma > 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathrm{A.B.}\Gamma}{\mathrm{B.}\Gamma\mathrm{.A}}} = 3, (\mathrm{A.M} \geq \Gamma\mathrm{.M})$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} + 4\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{\Gamma}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right) \geq 3 + 12 = 15$$

$$\frac{\Gamma+4\mathrm{B}-2\mathrm{A}}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{A}+4\Gamma-2\mathrm{B}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}+4\mathrm{A}-2\Gamma}{\Gamma} \geq 9 \Rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} + 4\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{\Gamma}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right) \geq 15$$

$$\text{Αλλά}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma > 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\mathrm{A.B.}\Gamma}{\mathrm{B.}\Gamma\mathrm{.A}}} = 3, (\mathrm{A.M} \geq \Gamma\mathrm{.M})$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma}{\mathrm{A}} + \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{B}}{\Gamma} + 4\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} + \frac{\Gamma}{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{A}}{\Gamma}\right) \geq 3 + 12 = 15$$