

**Τράπεζα Θεμάτων (ΙΕΠ)
Άλγεβρα Β΄ Λυκείου ΕΠΑΛ**

Εκφωνήσεις



2024-2025

Ασκησόπολις

Στέλιος Μιχαήλογλου / Δημήτρης Πατσιμάς / Νίκος Τούντας

www.Askisopolis.gr



Τα θέματα προέρχονται από την πλατφόρμα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας που αναπτύχθηκε (MIS5070818-Τράπεζα θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, Γενικό Λύκειο-ΕΠΑΛ) και είναι διαδικτυακά στο δικτυακό τόπο του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (Ι.Ε.Π.) στη διεύθυνση (<http://iep.edu.gr/el/trapeza-thematon-archiki-selida>)

Συστήματα

Γραμμικά συστήματα

2^ο Θέμα

19503. Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1): $y = x + 1$ και (ϵ_2): $y = x - 4$.

α) Να εξετάσετε αν το σημείο $A(0,1)$ ανήκει και στις δύο ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2).

β) Να εξετάσετε αν έχει λύση το σύστημα των εξισώσεων:
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ -x + y = -4 \end{cases}$$

20381. Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$$

α) Το ζεύγος $(x, y) = (0, 3)$ είναι λύση του συστήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να λύσετε το σύστημα.

20329.α) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + 7y = -5 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

β) Ποιο είναι το σημείο τομής των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος (Σ); Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

20291. Θεωρούμε τις ευθείες ϵ : $3x - 4y = 2$ και ϵ : $5x + 4y = 14$.

α) Να εξετάσετε αν το σημείο $(6, 4)$ είναι κοινό σημείο των ευθειών.

β) Να βρείτε το σημείο τομής των δυο ευθειών λύνοντας το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}$$

20266. Δίνεται το γραμμικό σύστημα
$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

α) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών (ϵ_1): $3x + 2y = 8$ και (ϵ_2): $2x - y = 3$.

19102. Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν το ζεύγος $(x, y) = (3, 1)$ είναι λύση του παραπάνω συστήματος.

β) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα.

21911. Δίνεται το γραμμικό σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = x + 1 \end{cases} \quad (1)$$

α) Δικαιολογήστε γιατί το σημείο $A(0,1)$ επαληθεύει μόνο τη μία εξίσωση από τις δύο, ενώ το σημείο $B(2,3)$ επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις.

β) Να λύσετε το σύστημα (1).

4^ο Θέμα

20437. Ένα μικρό κατάστημα σε μια γειτονιά πουλάει, μεταξύ άλλων αγαθών, γάλα και ψωμί. Την Τρίτη το πρωί μέσα σε μια ώρα πούλησε 8 φρατζόλες ψωμί και 5 λίτρα γάλα και εισέπραξε 14 ευρώ. Την Πέμπτη το πρωί την ίδια ώρα πούλησε 6 φρατζόλες ψωμί και 9 λίτρα γάλα και εισέπραξε 21 ευρώ. Αν x είναι η τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και y η τιμή πώλησης του ενός λίτρου γάλακτος,

α) Να εκφράσετε τα δεδομένα του προβλήματος με ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους.
β) Να βρείτε την τιμή πώλησης της μιας φρατζόλας ψωμιού και του ενός λίτρου γάλακτος.
γ) i. Να παραστήσετε γραφικά το σύστημα του α) ερωτήματος και να ονομάσετε B το σημείο τομής των δυο ευθειών.

ii. Αν το σημείο τομής των ευθειών είναι $B\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ να ερμηνεύσετε τις συντεταγμένες του στο πλαίσιο του προβλήματος.

36876. Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$.

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ) .

β) Να σχεδιάσετε σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων τις ευθείες $(\varepsilon_1): x + y = 3$, $(\varepsilon_2): x - y = 2$ και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

γ) Να βρείτε τα x για τα οποία τα σημεία της ευθείας ε_1 είναι πάνω από τα σημεία της ευθείας ε_2 .

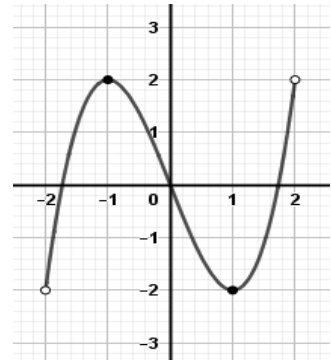
Συναρτήσεις

Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες συνάρτησης

2^ο Θέμα

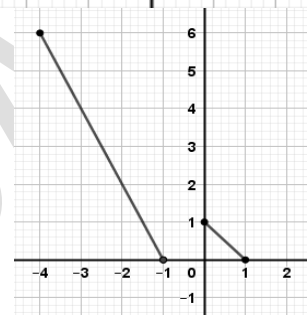
19024. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $(-2, 2)$.

- α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.
 β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.

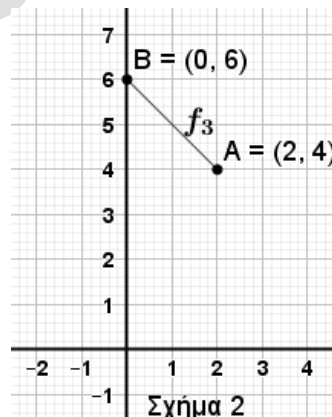
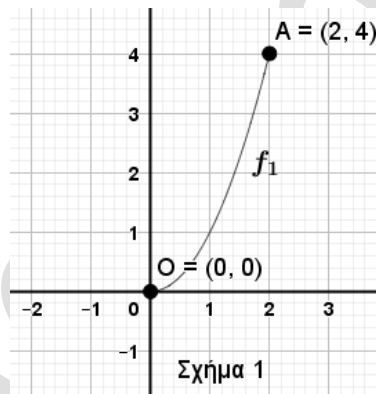


19026. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορισμένα τμήματα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-4, 4]$.

- α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να χαράξετε τα υπόλοιπα τμήματα της γραφικής παράστασης της f .
 β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



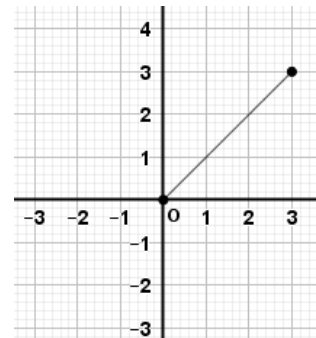
19504. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f_1 , f_3 .



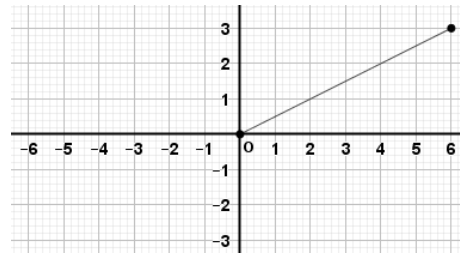
- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των f_1 , f_3 , εφόσον υπάρχουν.
 β) Να βρείτε τη μονοτονία των συναρτήσεων f_1 , f_3 .

20267. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-3, 3]$ είναι άρτια και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(2, 2)$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 3]$.

- α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.
 β) Να βρείτε το $f(-2)$.



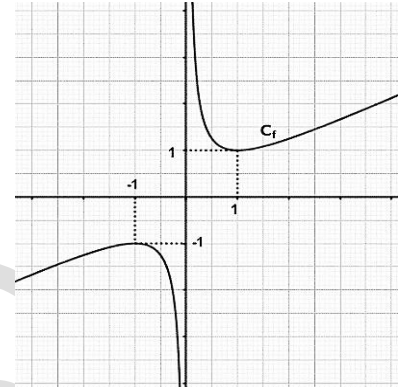
20268. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-6,6]$ είναι περιττή και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,6]$.



α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε το $f(-4)$.

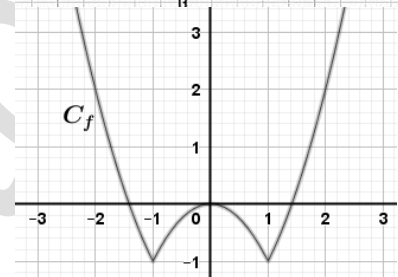
20328. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$ με $x \neq 0$. Με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

β) Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός «η συνάρτηση f είναι περιττή». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

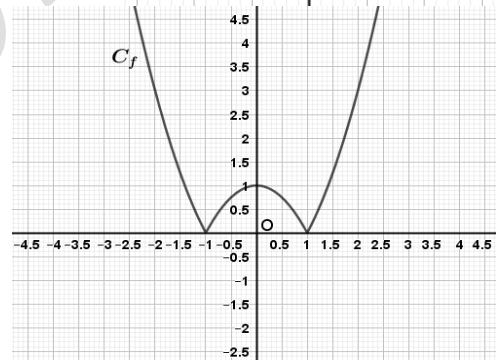
20434. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .



α) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις που την αποκτά.

20435. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .



α) Να βρείτε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

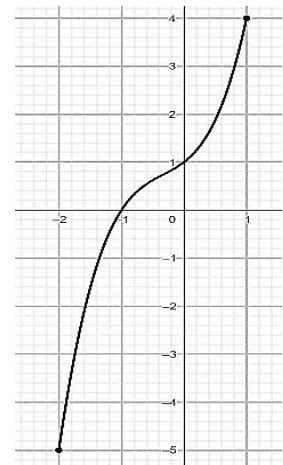
β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις που την αποκτά.

35978. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

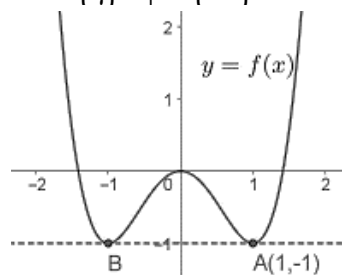
α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της f .

Είναι η f γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα;

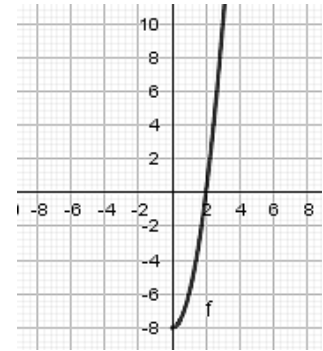
β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f καθώς και τις θέσεις των ακρότατων αυτών.



36385. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης f .



- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B.
 β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι:
 i. γνησίως αύξουσα, ii. γνησίως φθίνουσα.



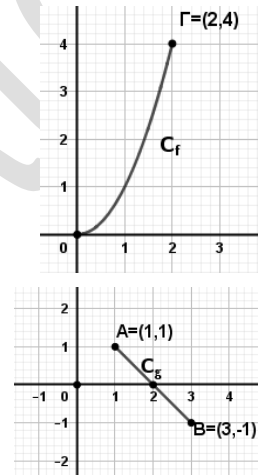
36703. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένα τμήμα της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

- α) Να μεταφέρετε το σχήμα στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση με το κομμάτι της καμπύλης που λείπει. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

4^ο Θέμα

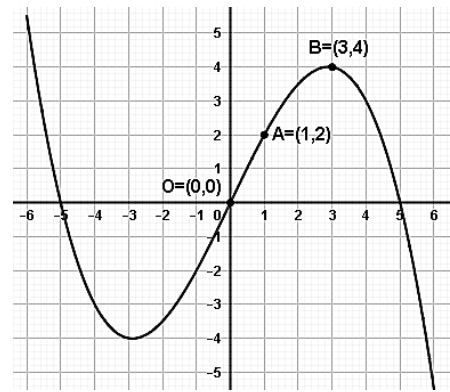
19505. Δίνεται ένα τμήμα (μέρος) της γραφικής παράστασης καθεμίας από τις συναρτήσεις f, g σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων.

- α) Σε καθένα από τα δύο σχήματα φαίνεται η γραφική παράσταση για όλους τους αριθμούς $x > 0$ για τους οποίους ορίζεται καθεμία από τις συναρτήσεις αυτές. Αν η συνάρτηση f είναι περιττή και η g άρτια, να βρείτε τα πεδία ορισμού των δύο συναρτήσεων.
 β) Να συμπληρώσετε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε όλο το πεδίο ορισμού της, αν αυτή είναι περιττή.
 γ) Να συμπληρώσετε ολόκληρη τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g σε όλο το πεδίο ορισμού της, αν αυτή είναι άρτια.
 δ) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα μονοτονίας των δύο συναρτήσεων f, g όπως αυτές προέκυψαν από τα ερωτήματα β και γ.



19509. Δίνονται τα σημεία $O(0,0), A(1,2), B(3,4)$ τα οποία ανήκουν στη γραφική παράσταση μίας περιττής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς \mathbb{R} .

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες δύο ακόμα σημείων Γ και Δ , τα οποία να ανήκουν στη γραφική παράσταση της f .
 β) Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, να βρείτε αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.
 γ) Αν δίνεται ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη και στο παρακάτω σχήμα δίνεται μέρος της γραφικής της παράστασης, να εξετάσετε σε ποια διαστήματα είναι γνησίως μονότονη και να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της σε καθένα από αυτά.

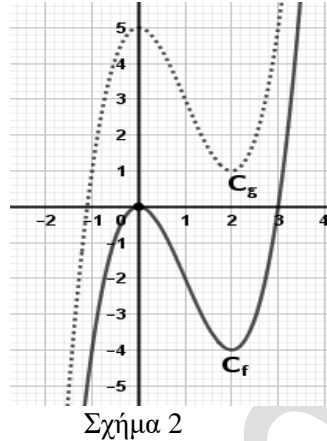
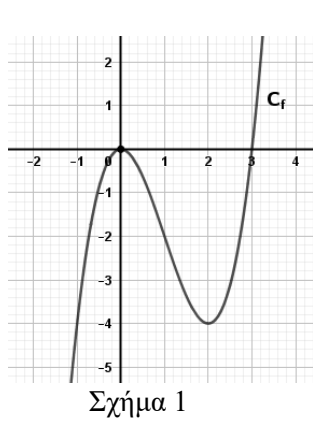


Κατακόρυφη –Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

2^ο Θέμα

20968. Στο σχήμα 1, δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x^2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα.

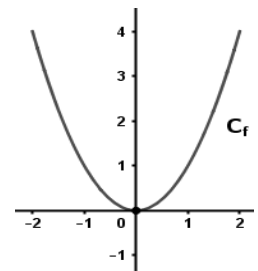


β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g του σχήματος 2, η οποία προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της f .

20286. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\varphi(x) = x^2 + 1$



20436. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

α) Να μεταφέρετε στο τετραδιό σας το σχήμα και να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$.

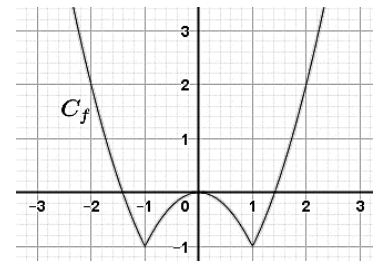
β) Να βρείτε ποια από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει γραφική παράσταση που προκύπτει αν μετατοπίσουμε τη γραφική παράσταση της f κατά δύο μονάδες προς τα κάτω και κατά μία μονάδα αριστερά. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

A. $h_1(x) = f(x+1) + 2$

B. $h_2(x) = f(x+1) - 2$

Γ. $h_3(x) = f(x) - 2$

Δ. $h_4(x) = f(x+1)$



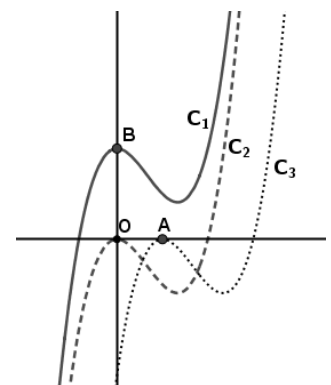
21601. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 , των συναρτήσεων f, g, h , όχι αναγκαστικά με αυτήν την αντιστοίχιση.

α) Αν η μία γραφική παράσταση από αυτές προκύπτει από τη μετατόπιση μίας άλλης κατά μία μονάδα προς τα δεξιά, να βρείτε ποιες είναι αυτές οι γραφικές παραστάσεις.

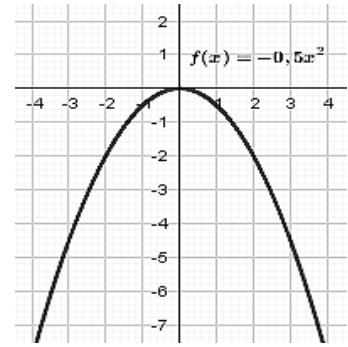
β) Αν η C_2 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = x^3 - 2x^2$, να βρείτε ποια γραφική παράσταση αντιστοιχεί στην

$g(x) = x^3 - 2x^2 + 2$.



36696. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -0,5x^2$, $x \in \mathbb{R}$.



α) i. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = -0,5x^2$						
$g(x) = -0,5x^2 + 1$						

ii. Στο παραπάνω σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -0,5x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρείτε με ποια μετατόπιση η γραφική παράσταση της f θα συμπίσει με τη γραφική παράσταση της g .

β) i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f κατά 1 μονάδα αριστερά.

ii. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων g και h .

36368. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x - 5$.

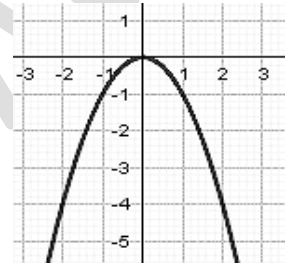
α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-2)^2 - 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq -1$ και να βρείτε για ποια τιμή του x είναι $f(x) = -1$.

γ) Να αιτιολογήσετε γιατί η f παρουσιάζει μέγιστο το οποίο και να προσδιορίσετε.

δ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $g(x) = -x^2$.

Με βάση αυτή να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .



Τριγωνομετρία

Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας

2^ο Θέμα

21118. Μία γωνία ω είναι ίση με 2 ακτίνια.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γωνία ω βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο του τριγωνομετρικού κύκλου.

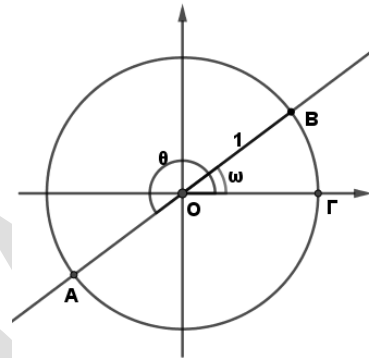
β) Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία ω .

20994. Θεωρούμε τον τριγωνομετρικό κύκλο και τα σημεία του A και B, τα οποία είναι συνευθειακά με την αρχή O των αξόνων.

Γνωρίζουμε ότι $\hat{\omega} = \frac{\pi}{4}$ rad.

α) Να βρείτε τους αριθμούς $\eta\mu\omega$ και $\sigma\upsilon\nu^2\omega$.

β) Να βρείτε μια γωνία θ , σε rad, της οποίας η αρχική πλευρά είναι η OΓ και η τελική πλευρά είναι η ΟΑ.



35617. Έστω θ μια γωνία με $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$, για την οποία ισχύει $\eta\mu\theta^\circ = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\theta^\circ = 0,6$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η θ είναι γωνία του πρώτου τεταρτημόριου του τριγωνομετρικού κύκλου.

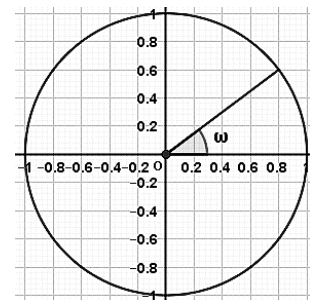
β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \sigma\upsilon\nu\theta^\circ - \sigma\upsilon\nu(2 \cdot 360^\circ + \theta^\circ)$.

35618. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$.

α) Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και το $\eta\mu\omega$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Αν $\eta\mu\omega = 0,6$ και $\sigma\upsilon\nu\omega = 0,8$, να βρείτε το $\eta\mu(-3 \cdot 360^\circ + \omega)$ και το $\sigma\upsilon\nu(-3 \cdot 360^\circ + \omega)$.



36334. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$ και φέραμε την εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου στο σημείο A.

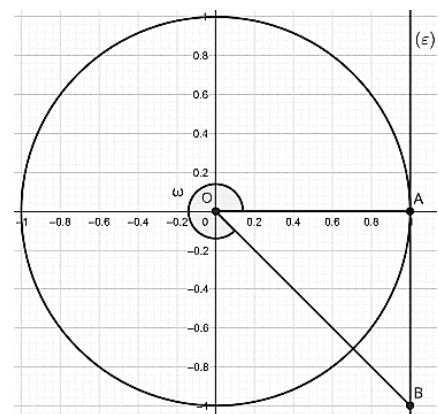
Με βάση το σχήμα:

α) i. Είναι ο αριθμός $\sigma\upsilon\nu\omega$ θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Είναι ο αριθμός $\eta\mu\omega$ θετικός ή αρνητικός αριθμός;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την εφω.

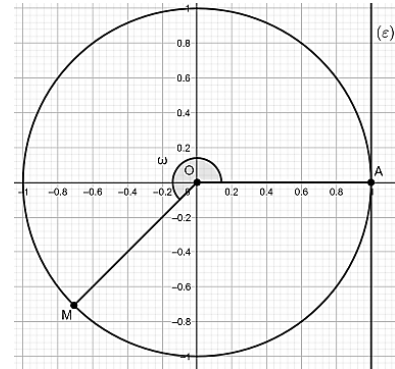


36335. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο σχεδιάσαμε γωνία $\hat{\omega}$ και φέραμε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο A . Με βάση το σχήμα:

α) i. Είναι ο αριθμός συνω θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ii. Είναι ο αριθμός ημω θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την εφω.

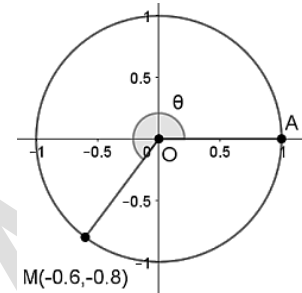


36358. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα σημεία $A(1,0)$,

$M(-0.6, -0.8)$ και η μη κυρτή γωνία $\theta = \widehat{AOM}$. Να βρείτε:

α) Να βρείτε το συνθ και το ημθ.

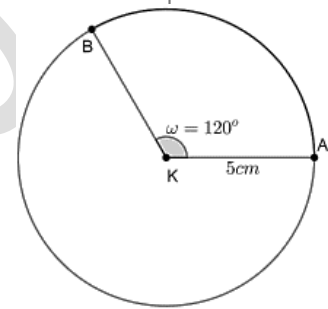
β) Να βρείτε το $\eta\mu(2\pi + \theta)$.



36389. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα 5cm . Επίσης, δίνεται τόξο AB που αντιστοιχεί σε γωνία $\hat{\omega} = 120^\circ$.

α) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας ω σε rad.

β) Αν το μέτρο της γωνίας ω σε rad είναι $\frac{2}{3}\pi$, να βρείτε το μήκος S του τόξου AB .



36701. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

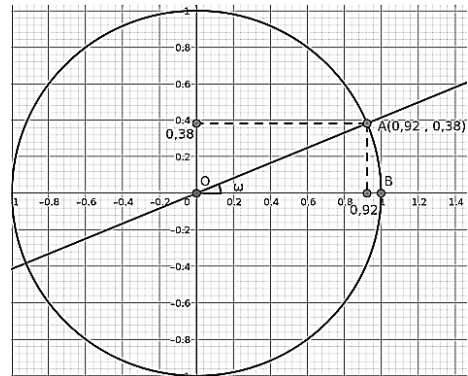
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

36748. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχει σχεδιαστεί η γωνία ω .

α) Να υπολογίσετε το ημω και το συνω.

β) Υπάρχει γωνία φ στο 2ο τεταρτημόριο ώστε $\sin\varphi = \sin\omega$;

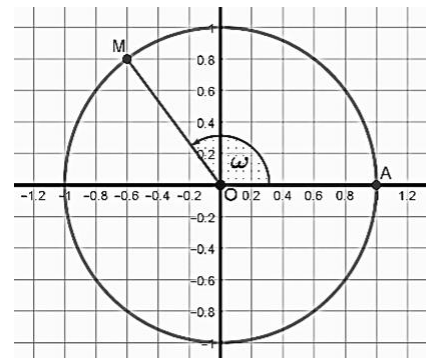


36820. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ο τριγωνομετρικός κύκλος και η γωνία $\hat{\omega} = \widehat{AOM}$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς ημω και συνω.

β) Να βρείτε, με δικαιολόγηση, τους αριθμούς $\eta\mu(720^\circ + \hat{\omega})$ και $\sin(-360^\circ + \hat{\omega})$.

γ) Σε ποιο τεταρτημόριο θα βρίσκεται η τελική πλευρά της γωνίας $180^\circ + \hat{\omega}$;

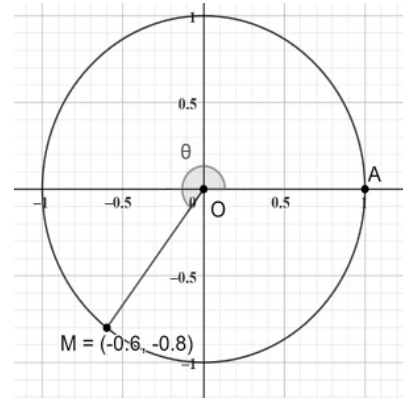


36880. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο δίνονται τα σημεία $A(1,0)$, $M(-0.6,-0.8)$ και η μη κυρτή γωνία

$\theta = \widehat{AOM}$. Να βρείτε :

α) το $\sin\theta$ και το $\eta\mu\theta$.

β) το $\eta\mu(360^\circ + \theta)$ και το $\sin(2\pi + \theta)$.



Ασκησότητες

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

2^ο Θέμα

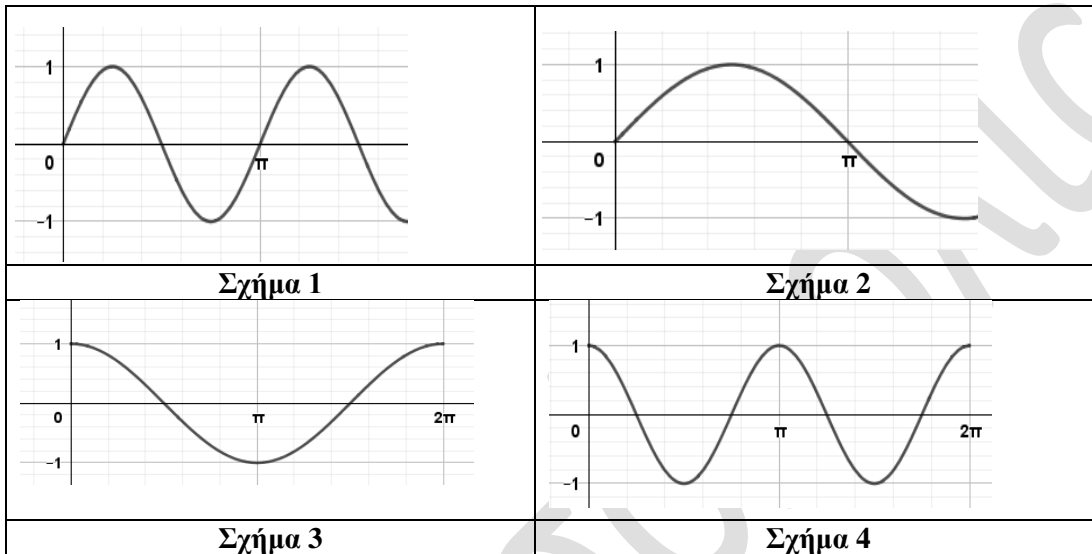
20397. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\eta\mu x, x \in [0, 2\pi]$.

α) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$					

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

21600. Στα παρακάτω 4 σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \eta\mu x, g(x) = \sigma\upsilon\eta x, h(x) = \eta\mu 2x, \varphi(x) = \sigma\upsilon\eta(2x)$, όχι με αυτήν τη σειρά αναγκαία.

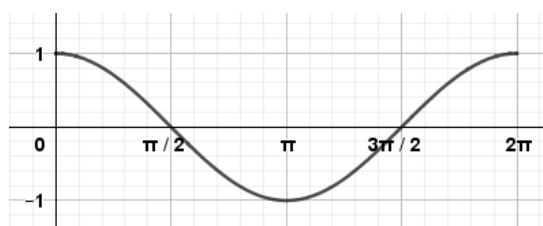


α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι περίοδοι των παραπάνω συναρτήσεων είναι: $T_f = T_g = 2\pi$,

$$T_h = T_\varphi = \pi.$$

β) Να βρείτε ποιο από τα τέσσερα σχήματα αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της $h(x) = \eta\mu(2x)$.

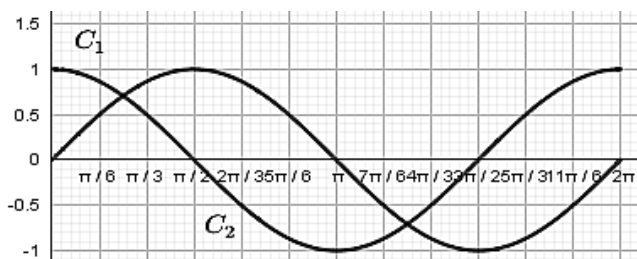
21789. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\eta x - 1, x \in [0, 2\pi]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sigma\upsilon\eta x, x \in [0, 2\pi]$.



α) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f καθώς επίσης και τις θέσεις των ακροτάτων αυτών.

35983. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει τις γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 δυο συναρτήσεων στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \eta\mu x$, ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ και ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τιμές $g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

36363. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \cdot \eta\mu x$.

α) Να βρείτε την περίοδο T της f .

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 2\pi]$.

36364. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3 \cdot \eta\mu x$.

α) Να βρείτε την περίοδο T της f .

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο $[0, 2\pi]$.

4ο Θέμα

21376. Το βάθος y , σε μέτρα, του νερού σε ένα λιμάνι επηρεάζεται από το φαινόμενο της παλίρροιας κατά τη διάρκεια μιας ημέρας (εντός 24 ωρών) και δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου

t (σε ώρες) από τη σχέση: $y = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4$, με $0 \leq t \leq 24$.

α) i. Να αιτιολογήσετε γιατί η περίοδος της συνάρτησης είναι $T = 12$.

ii. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

t	0	3	6	9	12
y					

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της

$$y = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4, \text{ με } 0 \leq t \leq 24.$$

β) i. Ποιο θα είναι το βάθος του νερού στις 12 το μεσημέρι, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = 12$;

ii. Ένα μεγάλο πλοίο χρειάζεται τουλάχιστον 4 μέτρα βάθος νερού για να δέσει στο λιμάνι. Στη διάρκεια ποιου χρονικού διαστήματος από τις 12 το μεσημέρι και μετά θα μπορεί να δέσει με ασφάλεια;

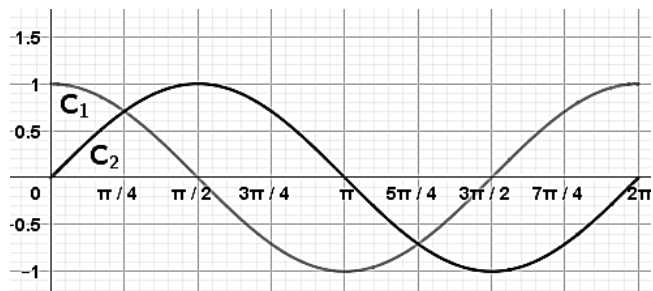
35548. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε σχεδιάσει δύο γραφικές παραστάσεις C_1 και C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

α) Αν οι γραφικές παραστάσεις είναι των συναρτήσεων $f(x) = \sin x$ και

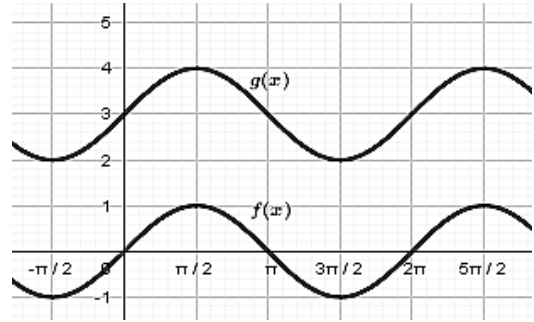
$g(x) = \eta\mu x$, ποια από τις C_1, C_2 είναι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sin x$ και

ποια της $g(x) = \eta\mu x$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Με την βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής των C_1, C_2 στο διάστημα $[0, 2\pi]$.



36395. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \eta\mu(\omega x)$ και της συνάρτησης g με τύπο $g(x) = \eta\mu(\omega x) + c$ με $\omega, c \in \mathbb{R}$.



α) Να βρείτε:

- i.** την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή, καθώς και την περίοδο T της συνάρτησης f ,
- ii.** την τιμή της παραμέτρου ω .

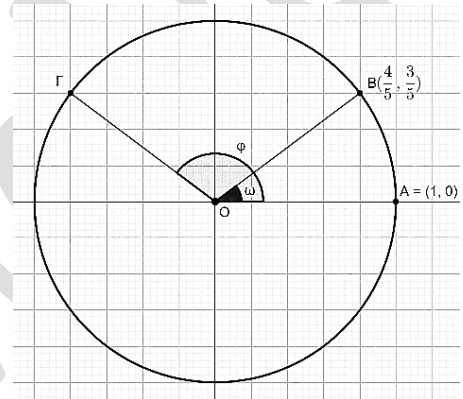
β) Αν $\omega = 2$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f , τότε:

- i.** να προσδιορίσετε το είδος της μετατόπισης με την οποία προκύπτει η γραφική παράσταση της g από τη γραφική παράσταση της f ,
- ii.** να βρείτε την τιμή της παραμέτρου c και τον τύπο της συνάρτησης g .

36546. Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο έχουμε

$\angle \hat{O}B = \omega$ και $\angle \hat{O}\Gamma = \varphi$. Το σημείο Γ είναι συμμετρικό του

$B\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ ως προς τον $y'y$ άξονα.



α) Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και το $\eta\mu\omega$.

β) i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ .

ii. Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\varphi$ και το $\eta\mu\varphi$.

γ) i. Να φέρετε τον άξονα των εφαπτομένων και να σημειώσετε σε αυτόν τα σημεία $E(1, \epsilon\varphi\omega)$ και $E'(1, \epsilon\varphi\varphi)$.

Αν $\epsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$, να βρείτε την $\epsilon\varphi\varphi$.

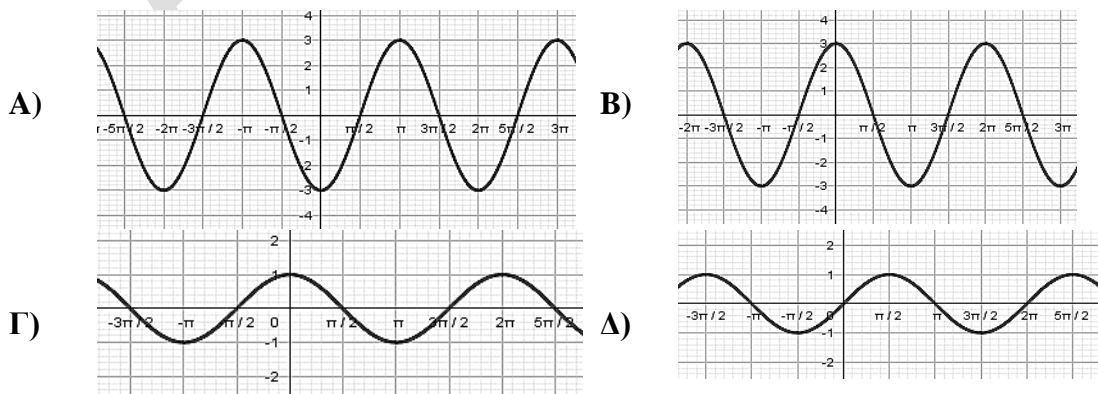
ii. Τι παρατηρείτε για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ ;

36704. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

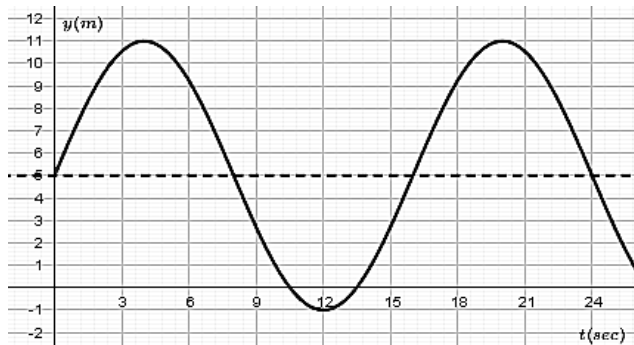
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

γ) Από τις παρακάτω τέσσερις γραφικές παραστάσεις μία μόνο αντιστοιχεί στη γραφική παράσταση της f , να επιλέξετε αυτή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x) = -3\sigma\upsilon\nu x$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



36792. Η απόσταση y , σε μέτρα, της άκρης του φτερού ενός νερόμυλου από την επιφάνεια του νερού, δίνεται ως συνάρτηση του χρόνου t , σε δευτερόλεπτα, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων.



α) Με βάση το σχήμα να βρείτε:

i. Την περίοδο T της συνάρτησης.

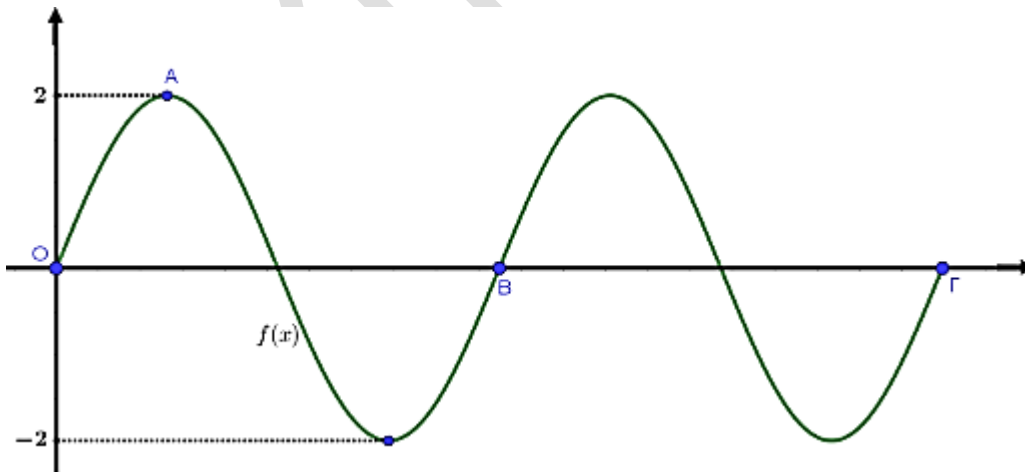
ii. Ποια χρονική στιγμή $t \in [0, 12]$ η άκρη του φτερού έχει την μεγαλύτερη απόσταση από την επιφάνεια του νερού και ποια είναι η απόσταση αυτή.

iii. Ποια χρονική $t \in [0, 12]$ η άκρη του φτερού βρίσκεται 1 μέτρο κάτω από την επιφάνεια του νερού.

β) Να βρείτε τη διάμετρο του νερόμυλου.

γ) Αν η συνάρτηση είναι της μορφής $y = \rho \eta\mu(\omega t) + 5$, $\rho, \omega > 0$, να βρείτε τους αριθμούς ω και ρ .

36850. Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί στο διάστημα $\left[0, \frac{4\pi}{3}\right]$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \cdot \eta\mu(\omega x)$ όπου $\rho > 0$, $\omega > 0$, $x \in \mathbb{R}$.



Γνωρίζουμε ότι τα σημεία A, B, Γ έχουν τις εξής συντεταγμένες:

$$A\left(\frac{\pi}{6}, 2\right), B\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right), \Gamma\left(\frac{4\pi}{3}, 0\right).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu(3x)$.

β) Να βρείτε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

γ) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο να σχεδιάσετε και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{9\pi}{6}\right]$.

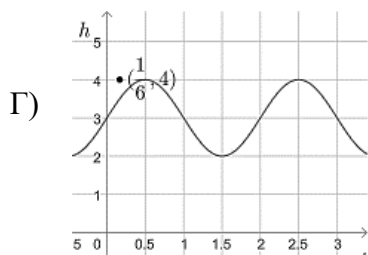
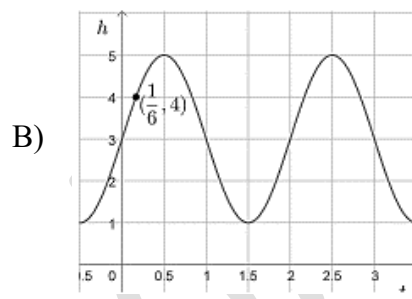
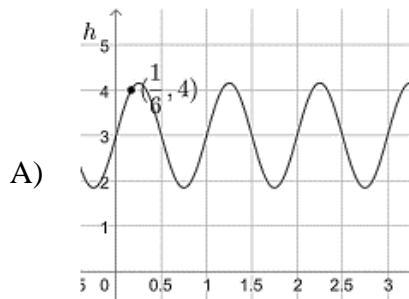
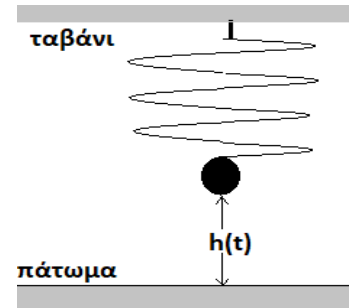
36949. Μια μπάλα που κρέμεται με ένα ελατήριο από το ταβάνι ανεβοκατεβαίνει και η απόστασή της h σε μέτρα από το πάτωμα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση $h(t) = a + 2\eta\mu(\pi t)$, όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα.

Αν τη χρονική στιγμή $t = \frac{1}{6}$ η μπάλα απέχει από το πάτωμα 4 μέτρα,

τότε:

α) Να δείξετε ότι $a = 3$ και ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2$.

β) Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις αντιστοιχεί στη συνάρτηση h ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.



γ) Με βάση τη γραφική παράσταση που επιλέξατε στο ερώτημα β), ποια είναι η μέγιστη και ποια η ελάχιστη απόσταση της μπάλας από το έδαφος; Πόση είναι η συνολική απόσταση που διανύει η μπάλα κατά τη διάρκεια μιας ταλάντωσης;

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Πολύωνυμα

2^ο Θέμα

19025. Δίνονται τα πολύωνυμα: $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2(x^3 - 1) + 9$ και $Q(x) = \alpha x^2 + 7, \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 4x^2 + 7$.

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολύωνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

20723. Δίνονται τα πολύωνυμα $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 2$ και $Q(x) = -2x^2(x - 2) + 2$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$;

β) Τα πολύωνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να βρείτε τη τιμή του πολυωνύμου $Q(x)$ για $x = 1$.

35980. Δίνονται τα πολύωνυμα:

$P(x) = -2x^4 + 4x^2 + 2(x^4 - 1) + 2x$ και $Q(x) = 4x^2 + \alpha x - 2, \alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 4x^2 + 2x - 2$.

β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε τα πολύωνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

Διαίρεση πολυωνύμων

2^ο Θέμα

20428. Δίνονται τα πολύωνυμα $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ και $\delta(x) = x + 1$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : \delta(x)$.

β) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του **α)** ερωτήματος.

20382. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x - 3$ έχει ηλίκο $x^2 + 2$ και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 3$ και να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

β) Είναι το $x = 3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

20966. Δίνεται το πολύωνυμο $P(x) = 2x^3 - 16x^2 + 4x - 27$.

α) Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 8)$ είναι $v = 5$.

β) Να υπολογίσετε το $P(8)$.

20556. Δίνεται το πολύωνυμο $P(x) = 2(x - 1)^{20} - 3(x - 1)^{10} + 5x^2 - 3x - 2$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή $P(1)$.

β) Να δείξετε ότι το πολύωνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$.

36360. Δίνεται το πολύωνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$.

β) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

36394. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4$.

α) Να εξετάσετε αν το $x - 2$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$.

Πολυωνυμικές εξισώσεις - ανισώσεις

2^ο Θέμα

21317. Δίνεται η εξίσωση $8x^4 - 9x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

β) Να αποδείξετε ότι δεν έχει άλλη ακέραια ρίζα.

21315. Έστω $P(x)$ πολυώνυμο το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$. Αν η διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ δίνει πηλίκο $x^2 + 1$, τότε:

α) Να αιτιολογήσετε γιατί $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

15619.α) Να αποδείξετε ότι: $2x^3 + x^2 - x = x(2x^2 + x - 1)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $2x^3 + x^2 - x = 0$.

21910. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ και $\delta(x) = x + 1$.

α) Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $P(x) : \delta(x)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

36359. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.

α) να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.

β) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 2$.

4ο Θέμα

18991. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί το πολυώνυμο $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

β) i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 1)$.

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του βι) ερωτήματος.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

19226. Η διαίρεση $P(x) : (x + 2)$ είναι τέλεια και έχει πηλίκο $x^2 - 4x + 3$.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

β) Να λύσετε την εξίσωση $(x + 2) \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

20269. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε την τιμή του α .

β) Για $\alpha = 2$:

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ και να δείξετε ότι $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 2)$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

20270. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + \lambda x - 2, \lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο έχει παράγοντα το $x + 1$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ .

β) Για $\lambda = 3$:

i. να αποδείξετε ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα και το $x - 2$ και ότι $P(x) = (x - 2)(x + 1)(x - 1)^2$.

ii. να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

20271. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - \lambda x + 2, \lambda \in \mathbb{R}$, του οποίου το υπόλοιπο της διαίρεσης με το $x - 1$ είναι 3.

α) να βρείτε την τιμή του λ .

β) για $\lambda = 1$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ και να αποδείξετε ότι $P(x) = (x - 1)(3x^2 + 2x + 1) + 3$.

ii. να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

20323. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

α) Να δείξετε ότι το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $(x - 2)(x^2 - 2x - 3) > 0$.

20340. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x + 1$.

β) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner, ή με όποιο άλλο τρόπο μπορείτε, να αποδείξετε ότι $P(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 2)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

20346. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - a, a \in \mathbb{R}$. Αν είναι γνωστό ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $a = 6$.

β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

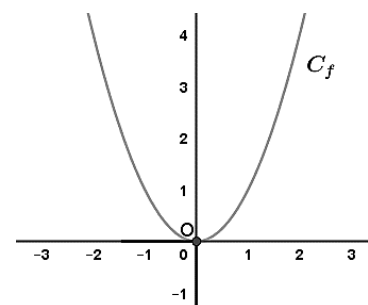
20350. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$.

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης

$g(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τη μονοτονία και την ελάχιστη τιμή της $g(x)$.

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_g με τη γραφική παράσταση



της $h(x) = x^3 + x, x \in \mathbb{R}$.

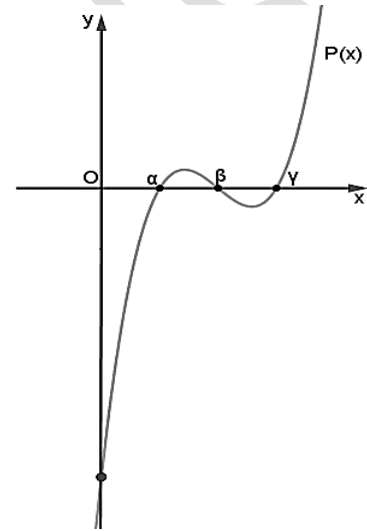
20433. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

- α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
 γ) Αν $P(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

20665. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.

- α) Να βρείτε τις τιμές του πολυωνύμου $P(0)$ και $P(-1)$.
 β) Ποιος από τους αριθμούς 0 και -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
 γ) Να βρείτε το ηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x+1)$.
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

20709. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x \in \mathbb{R}$ και έστω α, β, γ οι τετμημένες των σημείων στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση τον άξονα x 's.



- α) Να αποδείξετε ότι $P(3) = 0$.
 β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.
 γ) Να βρείτε, με αιτιολόγηση, τα α, β, γ .
 δ) Με τη βοήθεια του σχήματος, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

21090. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = (2-\alpha)x^3 - 3x^2 + 4x - 2$ και $Q(x) = x^3 - 3x^2 + (\alpha^2 + 3)x - 2$

- α) Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.
 β) Για $\alpha = 1$ να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.
 γ) Για $\alpha = 1$ να εξετάσετε αν το $x+1$ είναι παράγοντας του $Q(x)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

21320. Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο το οποίο όταν διαιρείται με το $x^2 + x + 2$ δίνει ηλίκο $x-2$ και υπόλοιπο $-2x+4$.

- α) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x + 2)$.
 β) Να αποδείξετε ότι $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{x} < 0$.

21324. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 - (\beta + 2)x + 6$ και το τριώνυμο $x^2 - x - 6$.

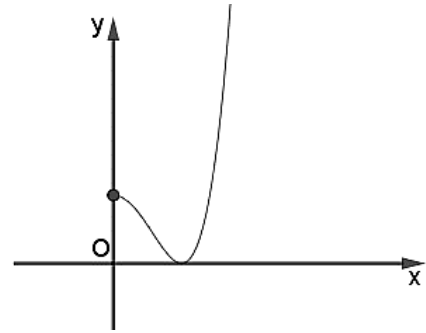
- α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.
 β) Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα κάθε παράγοντα του τριωνύμου, τότε:
 i. να αιτιολογήσετε γιατί $P(3) = P(-2) = 0$.
 ii. να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 3$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

21635. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση

$P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία γνωρίζουμε ότι είναι άρτια.

α) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας το παρακάτω σχήμα στο οποίο δίνεται η γραφική παράσταση της $P(x)$ για $x \geq 0$. Να συμπληρώσετε το σχήμα με την γραφική παράσταση της $P(x)$ για $x < 0$.



β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

γ) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός μηδέν είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $P(x)$. Για ποιες τιμές του x επιτυγχάνεται αυτή η ελάχιστη τιμή;

21672. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0, -1)$ και $B(-1, 0)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = -1$.

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

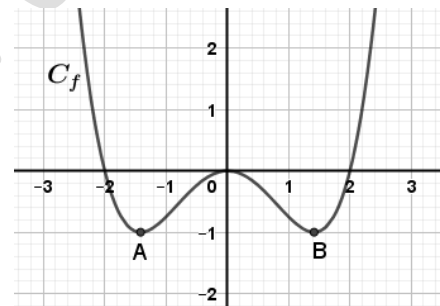
21905. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2$, με $x \in \mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αιτιολογήσετε γραφικά γιατί η συνάρτηση είναι άρτια.

β) Αν η τετμημένη του σημείου A είναι $-\sqrt{2}$, να βρείτε το είδος του (ολικού) ακρότατου, τις θέσεις που το αποκτά και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$, με όποιο τρόπο θέλετε (αλγεβρικό ή γραφικό).



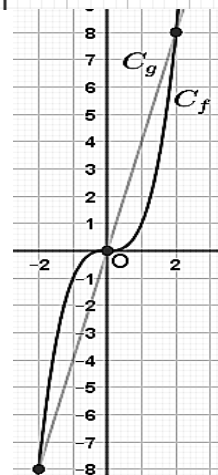
21907. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x) = x^3$ και $g(x) = 4x$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Από τη γραφική παράσταση της f , να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή και γνησίως μονότονη. Ποιο το είδος της μονοτονίας της;

β) Να λύσετε γραφικά ή αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



36369. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

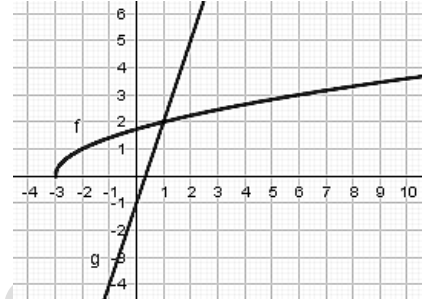
β) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (2x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

γ) Αν $P(x) = (2x + 1)(x^2 + 1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

- 36370.** Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + x + \lambda$. Αν είναι γνωστό ότι το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 1$, τότε:
- α)** να αποδείξετε ότι το $\lambda = -1$.
- β)** να αποδείξετε ότι $P(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$.
- γ)** να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$.

36705. Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{x+3}$ και $g(x) = 3x - 1$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τη μονοτονία των συναρτήσεων f, g .
- β)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
- γ)** Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < g(x)$.



36832. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 + 3x - 1$.

- α)** Να δείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
- β)** Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (3x - 1)$ και να δείξετε ότι $P(x) = (3x - 1)(x^2 + 1)$.
- γ)** Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

36878. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$.

- α)** Να δείξετε ότι το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.
- β)** Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (2x + 1)$ και να δείξετε ότι $P(x) = (2x + 1)(x^2 + 1)$.
- γ)** Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

36947. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $P(-1) = 6$ και $P(2) = 12$.

- α) i.** Να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} -\alpha + \beta = 7 \\ 2\alpha + \beta = -8 \end{cases}$.

ii. Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β .

- β)** Αν $P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$, να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$.

- γ)** Να λύσετε την ανίσωση $(x + 2)(2x^2 - 3x + 1) < 0$.

36948. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + ax + \beta \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \text{ και } 4 < \beta < 8.$$

- α) i.** Να αιτιολογήσετε γιατί ο 3 είναι διαιρέτης του β .

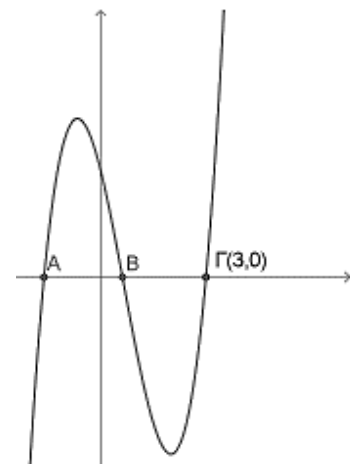
ii. Να δείξετε ότι $\beta = 6$.

- β)** Αν $f(1) = -4$, να δείξετε ότι $a = -8$.

- γ)** Αν $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 8x + 6$, να δείξετε ότι

$$f(x) = (x - 3)(2x^2 + 2x - 2).$$

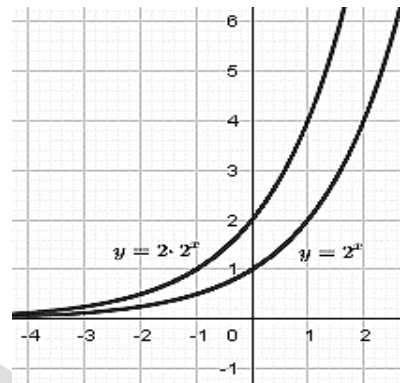
- δ)** Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων A και B.



Εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση

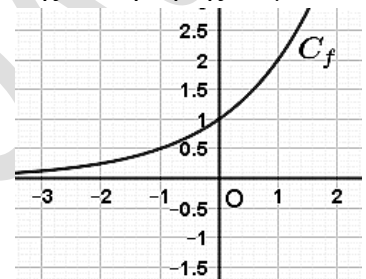
Εκθετική συνάρτηση 2^ο Θέμα

21416. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2^x$ και $g(x) = 2 \cdot 2^x$.



- α) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $g(0)$.
- β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής των δύο συναρτήσεων με τους άξονες x' και y' .
- γ) Να αποδείξετε ότι $g(x) = f(x+1)$ και στην συνέχεια να βρείτε με ποια οριζόντια μετατόπιση η γραφική παράσταση της συνάρτησης f θα συμπέσει με την γραφική παράσταση της g .

35620. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας εκθετικής συνάρτησης f , με πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R} .

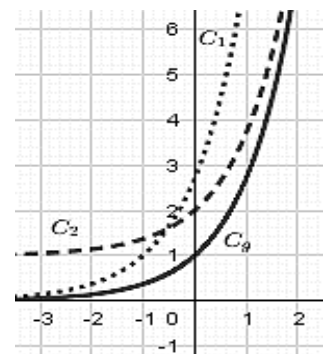


α) Με βάση την γραφική της παράσταση, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f .

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

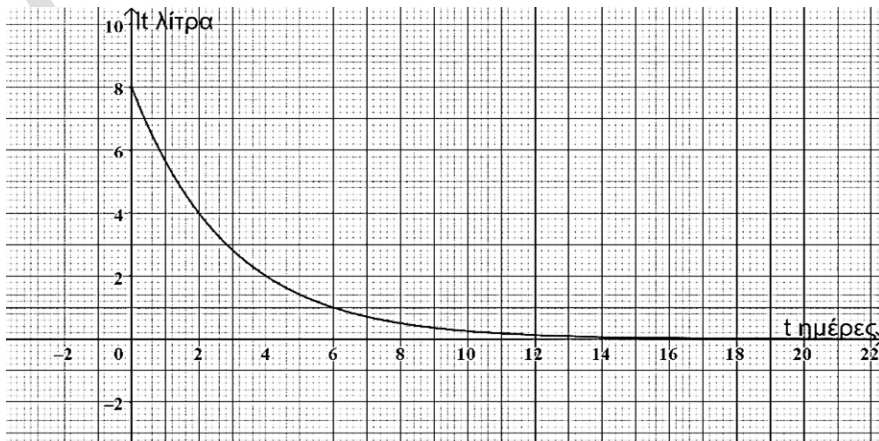
- β) Αν $f(x) = 2^x$
- i. Να βρείτε το $f(8)$,
- ii. Να βρείτε το $f(-2)$.

36750. Δίνεται ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{x+1}$.



- α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(-1)$, $f(0)$.
- β) Αν η συνάρτηση $g(x) = e^x$ έχει γραφική παράσταση όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να επιλέξετε ποια από τις γραφικές παραστάσεις C_1, C_2 αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

36817. Ένα δοχείο περιέχει υγρό το οποίο εξατμίζεται. Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η ποσότητα Q , σε λίτρα, του υγρού που έχει απομείνει στο δοχείο μετά από t ημέρες. Η ποσότητα του υγρού στο δοχείο μειώνεται εκθετικά και μετά από t ημέρες δίνεται από τη σχέση $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{c}}$, με c σταθερά και $c \in \mathbb{R}$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα του υγρού.



Με βάση το διάγραμμα:

α) να βρείτε την αρχική ποσότητα Q_0 του υγρού,

β) να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

γ) να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται για να εξατμιστεί η μισή ποσότητα του υγρού που υπήρχε τη χρονική στιγμή $t = 0$ στο δοχείο.

Χρόνος t σε ημέρες	0	2	4	6
Ποσότητα $Q(t)$ του υγρού σε λίτρα.				

4^ο Θέμα

35545.α) Να λύσετε το παρακάτω σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} 2\omega + 3\varphi = 17 \\ 4\omega - 3\varphi = 7 \end{cases}$$

β) Αν η λύση του συστήματος (Σ) είναι $(\omega, \varphi) = (4, 3)$ και

$2^x = \omega, 3^y = \varphi$, να βρείτε τους αριθμούς x και y .

36823. Μέσα σε έναν ανθρώπινο οργανισμό υπάρχει ένας πληθυσμός από το βακτήριο *Escherichia coli*, το οποίο κάτω από ευνοϊκές συνθήκες, διπλασιάζεται κάθε 20 λεπτά. Γνωρίζουμε ότι το πλήθος αυτών των βακτηρίων, ως συνάρτηση του χρόνου t σε ώρες, δίνεται από τη συνάρτηση $P(t) = 2 \cdot 8^t$, όπου $t \geq 0$.

α) Πόσα βακτήρια υπάρχουν αρχικά στον οργανισμό;

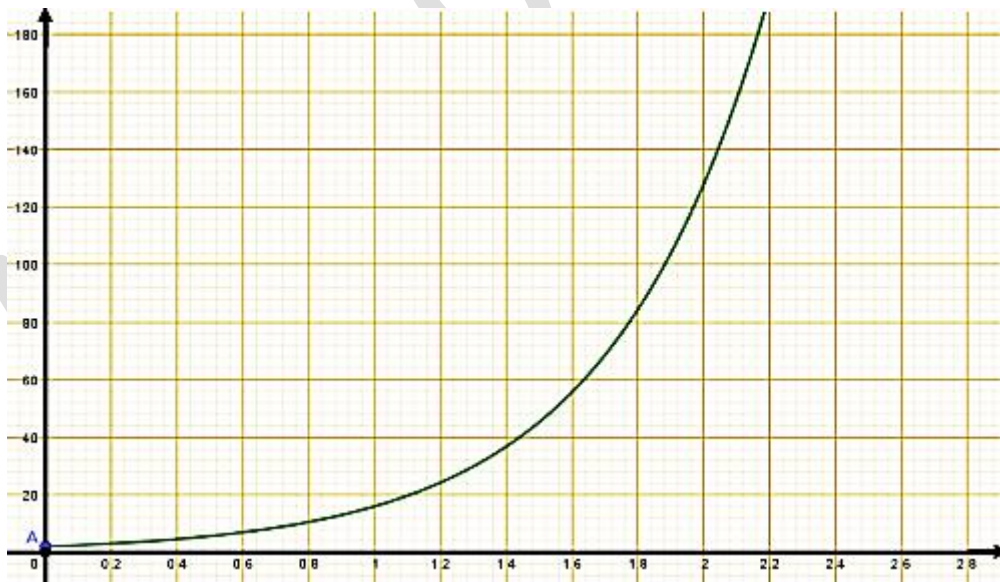
β) Να μεταφέρετε στο γραπτό σας, σωστά συμπληρωμένο τον παρακάτω πίνακα:

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(t)$. Με τη βοήθεια της γραφικής

παράστασης, να εκτιμήσετε τον χρόνο που θα υπάρχουν:

i. 100 βακτήρια **ii.** 160 βακτήρια.

t	$\frac{1}{3}$	1	2	3	4
$P(t)$					



4ο Θέμα

20999. Ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο για το πλήθος των ανθρώπων σε μια μαθητική κοινότητα που έχουν ακούσει μια συγκεκριμένη φήμη, περιγράφεται από την ισότητα

$N = P \cdot (1 - e^{-0,15k})$, όπου P ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας και k είναι ο αριθμός των ημερών που έχουν περάσει από τότε που ξεκίνησε η φήμη. Υποθέτουμε ότι ο συνολικός πληθυσμός της κοινότητας είναι 1000 άνθρωποι.

α) Να βρείτε πόσα μέλη της μαθητικής κοινότητας θα έχουν ακούσει τη φήμη μετά από 20 ημέρες.

β) Πόσες ημέρες θα περάσουν ώστε να έχουν ακούσει τη φήμη 450 άνθρωποι από τους 1000;

γ) Είναι δυνατόν να ακούσουν τη φήμη όλα τα μέλη της κοινότητας; Εξηγήστε.

Δίνονται: $e^3 \cong 20$ και $\ln(0,55) \cong -0,6$.

35544.α) Να λύσετε την εξίσωση $\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega = 0$ (1).

β) Αν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2$, να βρείτε (αν υπάρχει) τον αριθμό

x σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $e^x = \omega_1$, **ii.** $e^x = \omega_2$, **iii.** $e^x = \omega_3$.

Λογαριθμική συνάρτηση

2^ο Θέμα

20997. Θεωρούμε τον αριθμό $p = \log 4 + 2\log 5$.

α) Να αποδείξετε $\log 4 = 2\log 2$ και στη συνέχεια ότι $p = 2$.

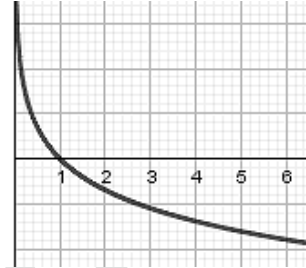
β) Να βρείτε τον θετικό αριθμό x ώστε $\ln x = p$.

15592. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(-1) = f(1) = 0$ και $f(-2) = f(2)$.

β) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για $x > 0$.

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , για $x < 0$.



21285. Δίνεται η παράσταση $A = 2\log 4 + 4\log 5$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = 4$.

β) Για ποια τιμή του αριθμού $x \neq 0$ ισχύει $\ln x^2 = \frac{A}{2}$.

35619. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι $f(2) + f(11) = 1$.

36365. Δίνεται ο αριθμός $A = \log 10 + \log 100 + \log 10^6$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 9$ **β)** $0 < \log A < 1$.

36366. Δίνεται ο αριθμός $A = \ln e + \ln e^2$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 3$ **β)** $\ln A > 1$.

Δίνεται ότι $e \approx 2.71$.

36367. Δίνεται ο αριθμός $A = 10^{\log 5} - e^{\ln 3}$. Να αποδείξετε ότι

α) $A = 2$ **β)** $0 < \ln A < 1$.

Δίνεται ότι $e \approx 2.71$

36382. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να υπολογίσετε τις τιμές της f για $x = 3$, $x = 12$ και $x = 102$.

4ο Θέμα

20707. Η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ μετριέται σε μονάδες ASA ή σε μονάδες DIN. Αν x μονάδες ASA συνδέονται με y μονάδες DIN με τον τύπο $y = 1 + 10 \cdot \log x$, τότε:

α) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 10.

β) Να βρείτε πόσες μονάδες DIN είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες ASA, είναι 200.

γ) Να επιλύσετε τον παραπάνω τύπο ως προς x .

δ) Να βρείτε πόσες μονάδες ASA είναι η ευαισθησία ενός φωτογραφικού φιλμ, αν γνωρίζουμε ότι η ευαισθησία αυτού του φιλμ σε μονάδες DIN, είναι 13.

Δίνεται ότι $\log 2 = 0,3$ και $10^{\frac{6}{5}} \cong 15,85$.

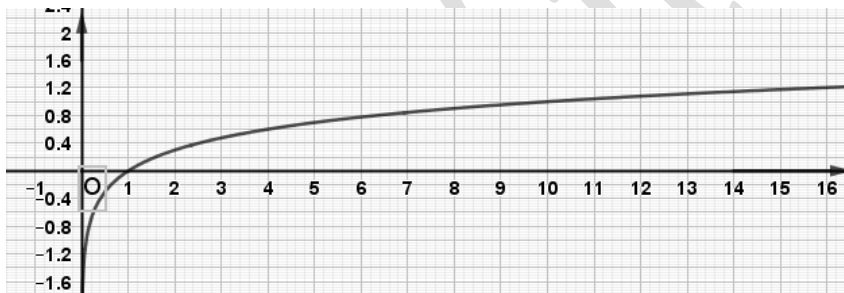
20708. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$, $x > 0$ και

$$g(x) = \log(10x - 20), \quad x > 2.$$

α) Να βρείτε τους αριθμούς $g(2,1)$ και $g(12)$.

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = 1 + f(x - 2)$.

γ) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Να μεταφέρετε το παρακάτω σχήμα στο γραπτό σας, το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης g .



21638. Ο αριθμός των διαφορετικών ειδών των έμβιων όντων που υπάρχουν στις Μεγάλες Λίμνες της Β. Αμερικής, δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{450}{1 + 8 \cdot e^{-0,016t}}$ μετά t χρόνια

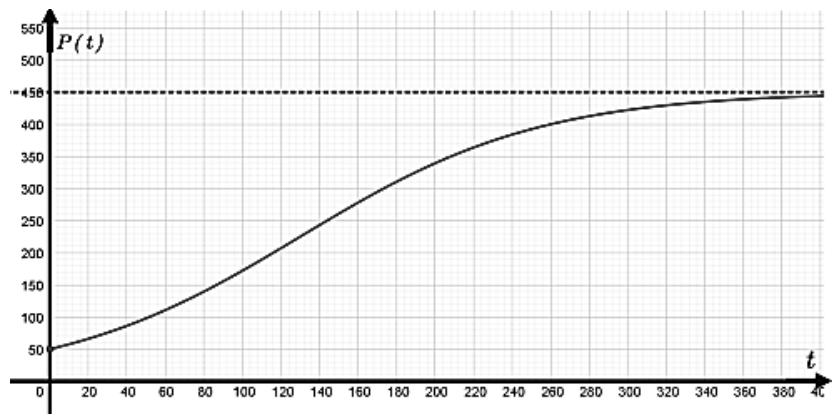
από το έτος 1900. Θεωρούμε ότι η μεταβλητή t παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές.

α) Να βρείτε πόσα είδη έμβιων όντων υπήρχαν το έτος 1900.

β) Να βρείτε, προσεγγιστικά, ποιο έτος θα υπάρχουν περίπου 225 διαφορετικά είδη.

γ) Στο παρακάτω σχήμα υπάρχει η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(t)$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τη μονοτονία της $P(t)$. Από ποια τιμή θα είναι πάντα μικρότερες οι τιμές $P(t)$;

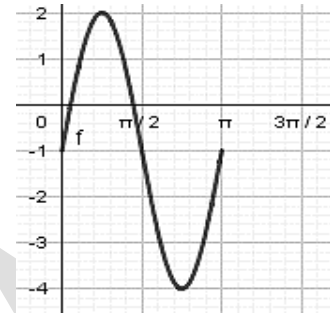
Δίνεται ότι $\ln 8 \cong 2,08$.



36371. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = x$. Έστω επίσης g συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της f ως προς την ευθεία (ε) .

- α)** Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
- β)** Να γράψετε τον τύπο της g και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- γ)** Να αποδείξετε ότι σημείο $(2, f(\ln 2))$ είναι πάνω στην ευθεία (ε) .

36372. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3\eta\mu(2x) + \kappa$ στο $[0, \pi]$.



- α)** Να αποδείξετε ότι $\kappa = -1$.
- β)** Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f .
- γ)** Να αποδείξετε ότι $0 < \ln 2 < 1$.
- δ)** Να αιτιολογήσετε γραφικά γιατί η εξίσωση $f(x) = \ln 2$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $[0, \pi]$.

36373. Δίνεται γωνία $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Να αιτιολογήσετε γιατί

- α)** δεν ορίζεται η παράσταση $\ln(\sigma\upsilon\nu\theta)$ ενώ ορίζεται η παράσταση $\ln(\eta\mu\theta)$.
- β)** $\ln(\eta\mu\theta) < 0$.

36374. Να αιτιολογήσετε γιατί

- α)** $\delta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
- β)** ορίζεται ο αριθμός $\ln(\sigma\upsilon\nu\delta)$.
- γ)** $\ln(\sigma\upsilon\nu\delta) < 0$.

36375. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1)$.

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο με τετμημένη 2.
- γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

36376. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 1$.

- α)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$.
- β)** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο με τετμημένη $\frac{1}{e}$.
- γ)** Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

36377. Να αιτιολογήσετε γιατί ισχύουν:

- α)** $1 \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ **β)** $1 < 2 \cdot \eta\mu 1 < 2$ **γ)** $0 < \ln(2 \cdot \eta\mu 1) < 1$.

36697. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(x+3)$.

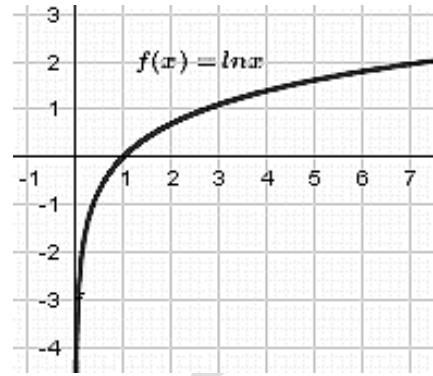
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο με τετμημένη -2 .

γ) Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \ln x$.

i. Να βρείτε με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f θα προκύψει η γραφική παράσταση της g .

ii. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g .



Ασκησίοπολις