ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α; 2018, 2019

Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.Για να εκφράσουμε τη διαδικασία αυτή, γράφουμε:

$$f : A \to \mathbb{R}$$
$$x \to f(x)$$

→ Το γράμμα x παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του Α και λέγεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το γράμμα y, που παριστάνει την τιμή της f στο x, λέγεται εξαρτημένη μεταβλητή.

→ Το πεδίο ορισμού Α της f συμβολίζεται με D_f.

2. Τι ονομάζεται σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το Α.

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή: $f(A) = \{y / y = f(x), x \in A\}$

3. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, f(x))$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται με C_f.

4. Πως προκύπτει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $-f$, $|f|$ με βοήθεια της γραφικής παράσταση της f;

Η γραφική παράστασης της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f, γιατί αποτελείται από τα σημεία $M'(x, -f(x))$ που είναι συμμετρικά των $M(x, f(x))$, ως προς τον άξονα $x'x$.

Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ ή πάνω σε αυτόν και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα αυτόν.

5. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες; 2007, 2012, 2016, 2021 , 2023

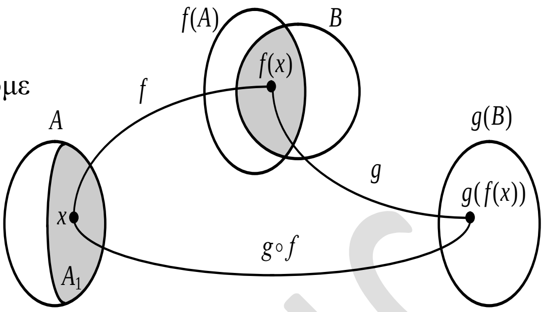
Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

6. Πως ορίζονται οι πράξεις των συναρτήσεων;

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο fg και πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Το πεδίο ορισμού των $f + g$, $f - g$ και fg είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού *Α* και Β των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρουμένων των τιμών του *x* που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x \mid x \in A \text{ και } x \in B \text{ με } g(x) \neq 0\}$.

7. Τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού Α, Β αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g, και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $(gof)(x) = g(f(x))$.



Το πεδίο ορισμού της gof αποτελείται από όλα τα στοιχεία *x* του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g. Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A \,/\, f(x) \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι η gof ορίζεται αν $A_1 \neq \varnothing$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

ΣΧΟΛΙΑ

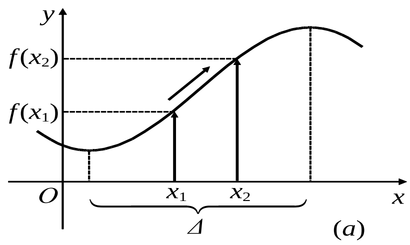
- Γενικά, αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.
- Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Τη συνάρτηση αυτή τη λέμε σύνθεση των f, g και h και τη συμβολίζουμε με $h \circ g \circ f$.
Η σύνθεση συναρτήσεων γενικεύεται και για περισσότερες από τρεις συναρτήσεις.

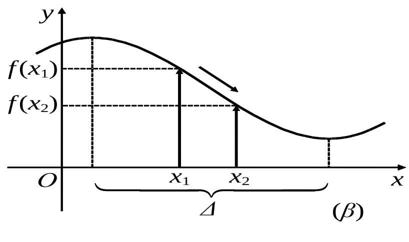
8. Πότε μία συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα και πότε γνησίως φθίνουσα και πότε γνησίως μονότονη σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται:

- **γνησίως αύξουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$ (Σχ. α)



- **γνησίως φθίνουσα** σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$ (Σχ. β)

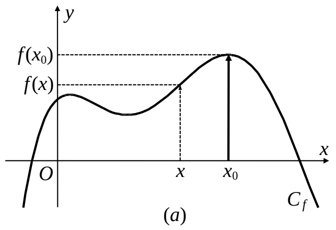


Για να δηλώσουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (αντιστοίχως γνησίως φθίνουσα) σε ένα διάστημα Δ, γράφουμε $f \nearrow \Delta$ (αντιστοίχως $f \searrow \Delta$). Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

9. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο και πότε ελάχιστο; 2014, 2010

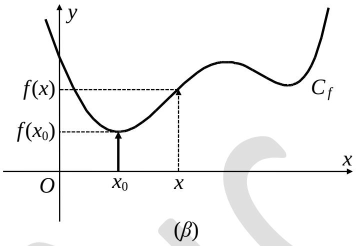
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού *A* θα λέμε ότι:

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f\left(x_0\right)$, όταν $f\left(x\right) \le f\left(x_0\right)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. α)



(α)

- Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \ge f(x_0)$ για κάθε $x \in A$ (Σχ. β).



(β)

10. Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1; 1987, 2005, 2015

Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \ne x_2$, τότε $f\left(x_1\right) \ne f\left(x_2\right)$.

Με απαγωγή σε άτοπο αποδεικνύεται ότι:

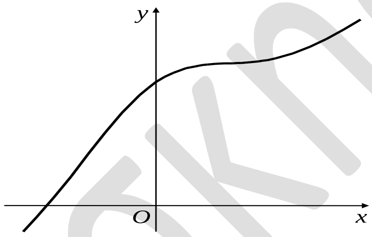
Μια συνάρτηση $f:A \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση $1-1$, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$ τότε $x_1 = x_2$.

ΣΧΟΛΙΑ

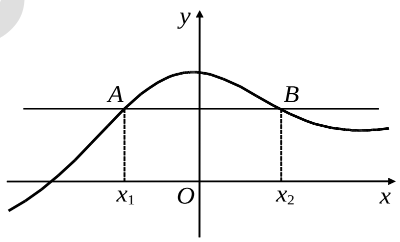
- Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν:

— Για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μια λύση ως προς *x*.

— Δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.



συνάρτηση 1-1

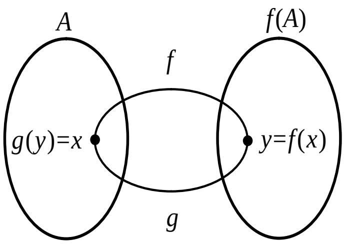


συνάρτηση όχι 1-1

- Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε προφανώς, είναι συνάρτηση 1-1.

11. Πως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας συνάρτησης f και τι γνωρίζεται για τις γραφικές τους παραστάσεις; 2019

Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο *y* του συνόλου τιμών, $f\left(A\right)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο *x* του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f\left(x\right) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση $g: f\left(A\right) \to \mathbb{R}$ με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.



Από τον τρόπο που ορίστηκε η *g* προκύπτει ότι:

— έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f,

— έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού *A* της f και

— ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$.

Αυτό σημαίνει ότι, αν η f αντιστοιχίζει το *x* στο y, τότε η g αντιστοιχίζει το y στο *x* και αντιστρόφως. Δηλαδή η g είναι η αντίστροφη διαδικασία της f. Για το λόγο αυτό η *g* λέγεται **αντίστροφη συνάρτηση** της f και συμβολίζεται με f^{-1}. Επομένως έχουμε

$$\boxed{f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x}$$

οπότε $\quad f^{-1}\left(f\left(x\right)\right)=x,\quad x\in A \quad$ και $\quad f\left(f^{-1}\left(y\right)\right)=y,\quad y\in f\left(A\right)$.

12. Να εξηγήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

Επειδή $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x$, αν ένα σημείο $M\left(\alpha,\beta\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C της f, τότε το σημείο $M'\left(\beta,\alpha\right)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C΄ της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄, δηλαδή την $y=x$.

ΟΡΙΟ –ΣΥΝΕΧΕΙΑ

→ Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $\left(\alpha,x_0\right)\cup\left(x_0,\beta\right)$,

τότε: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\ell$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to x_0^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f\left(x\right)=\ell$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)-\ell\right)=0$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=\ell \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f\left(x_0+h\right)=\ell$

→ $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$

13. Ποια θεωρήματα ισχύουν για το όριο και τη διάταξη;

Για το όριο και τη διάταξη ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)>0$, τότε $f\left(x\right)>0$ κοντά στο x_0
- Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)<0$, τότε $f\left(x\right)<0$ κοντά στο x_0

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν οι συναρτήσεις f,g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f\left(x\right)\le g\left(x\right)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\le \lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)$.

14. Ποιες είναι οι ιδιότητες των ορίων;

Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)+\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(kf\left(x\right)\right)=k\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)$ για κάθε σταθερά $k\in\mathbb{R}$.
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)g\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)$
4. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)}{\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g\left(x\right)\ne 0$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

6. $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ εφόσον $f(x)\geq 0$ κοντά στο x_0.

7. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{\nu} = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$

15. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}P(x)=P(x_0)$, $x_0\in\mathbb{R}$.

Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+$$
$$\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right)+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1\lim_{x\to x_0}x+\alpha_0=$$
$$\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=P(x_0)$$

16. Να αποδείξετε ότι για τα πολυώνυμα $P(x),Q(x)$, με $Q(x_0)\neq 0$, $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

17. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής. 2016, 2020, 2021

Έστω οι συναρτήσεις f,g,h. Αν $h(x)\leq f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\ell$, τότε και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\ell$.

18. Ποια είναι τα βασικά τριγωνομετρικά όρια στο $x_0\in\mathbb{R}$;

1. $|\eta\mu x|\leq|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$)
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\eta\mu x=\eta\mu x_0$ 3. $\lim\limits_{x\to x_0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu x_0$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

19. Πως ορίζεται το όριο της σύνθεσης $f\circ g$ δύο συναρτήσεων f, g στο σημείο x_0;

Για να υπολογίσουμε το $\lim\limits_{x\to x_0}f(g(x))$, της σύνθετης συνάρτησης $f\circ g$ στο σημείο x_0, εργαζόμαστε ως εξής:

1. Θέτουμε $u=g(x)$.
2. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ και
3. Υπολογίζουμε (αν υπάρχει) το $\ell=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$.

Αποδεικνύεται ότι, αν $g(x)\neq u_0$ κοντά στο x_0, τότε το ζητούμενο όριο είναι ίσο με ℓ, δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to u_0}f(u).$$

20. Ποιες είναι οι ιδιότητες του μη πεπερασμένου ορίου $x_0 \in \mathbb{R}$;

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$.
3. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 .
4. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = -\infty$, ενώ αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0} (-f(x)) = +\infty$.
5. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$
6. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) > 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$, ενώ

αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = +\infty$.
8. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\kappa]{f(x)} = +\infty$

<u>**Συνέπειες**</u>

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{2\nu}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = +\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$, ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ και γενικά $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^{2\nu+1}} = -\infty, \nu \in \mathbb{N}^*$,

Δηλαδή δεν υπάρχει στο μηδέν το όριο της $f(x) = \frac{1}{x^{2\nu+1}}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$,

21. Ποια είναι τα όρια πολυωνυμικής και ρητής συνάρτησης στο ∞ ;

→ Για την πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_\nu \neq 0$, ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\alpha_\nu x^\nu)$

→ Για τη ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0}{\beta_\mu x^\mu + \beta_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0}$, $\alpha_\nu \neq 0$, $\beta_\mu \neq 0$, ισχύει: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}\right)$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}\right)$

22. Ποια είναι τα όρια της εκθετικής και της λογαριθμικής συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού τους;

1. Αν $\alpha > 1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$
2. Αν $0 < \alpha < 1$, τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$

23. Τι ονομάζεται ακολουθία;

Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$.

24. Πότε η ακολουθία (α_ν) έχε όριο $\ell \in \mathbb{R}$;

Θα λέμε ότι η ακολουθία (α_ν) έχει όριο το $\ell \in \mathbb{R}$ και θα γράφουμε $\lim\limits_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \ell$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu > \nu_0$ να ισχύει $|\alpha_\nu - \ell| < \varepsilon$.

25. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της;
2015, 2009, 1986, 1983

Έστω μια συνάρτηση f και ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0, όταν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

26. Πότε μια συνάρτηση θα λέμε ότι είναι συνεχής;

Μία συνάρτηση f που είναι συνεχής σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, θα λέμε ότι είναι συνεχής συνάρτηση.

27. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο (α, β); 2004

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β).

28. Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$; 2008, 2012, 2004, 2017, 2021

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α,β) και επιπλέον $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$.

29. Αν δύο συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο x_0, τότε ποιες άλλες συναρτήσεις που ορίζονται μέσω των f,g είναι συνεχείς στο x_0;

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0, τότε είναι συνεχείς στο x_0 και οι συναρτήσεις:

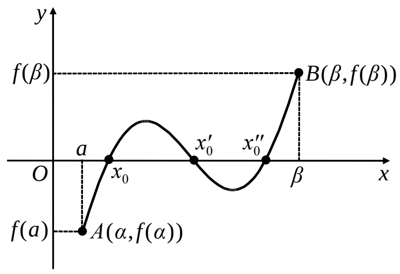
$f+g$, $c\cdot f$, όπου $c\in\mathbb{R}$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $|f|$ και $\sqrt[\nu]{f}$

Επιπλέον αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους gof είναι συνεχής στο x_0.

30. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να «δώσετε» την γεωμετρική του ερμηνεία.
2003, 2014, 2020

Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και, επιπλέον, ισχύει $f(\alpha)f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.
Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α,β).

Γεωμετρική ερμηνεία

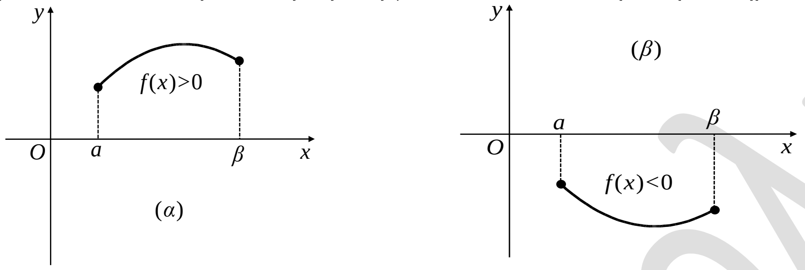


Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha,f(\alpha))$ και $B(\beta,f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα $x'x$, η γραφική παράσταση της f
τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το θεώρημα του Bolzano προκύπτει ότι:

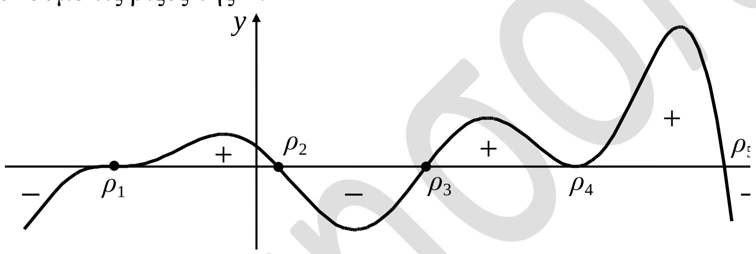
— Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δε μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in \Delta$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in \Delta$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.



— Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από το διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
Αυτό μας διευκολύνει στον προσδιορισμό του πρόσημου της f για τις διάφορες τιμές του x.

Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αυτός γίνεται ως εξής:

α) Βρίσκουμε τις ρίζες της f.



β) Σε καθένα από τα υποδιαστήματα που ορίζουν οι διαδοχικές ρίζες, επιλέγουμε έναν αριθμό και βρίσκουμε το πρόσημο της f στον αριθμό αυτό. Το πρόσημο αυτό είναι και το πρόσημο της f στο αντίστοιχο διάστημα.

31. Να διατυπώσετε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, να το αποδείξετε και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία. 1995, 2005, 2015, 2020

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Απόδειξη

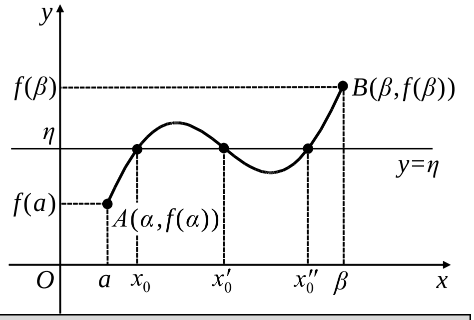
Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$.Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta,\ x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και

$g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

Γεωμετρική ερμηνεία

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και τα ακριανά σημεία βρίσκονται σε διαφορετικό ύψος τότε κάθε οριζόντια ευθεία $y = \eta$ με $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$ τέμνει την C_f τουλάχιστον σε ένα σημείο.



32. Ποια είναι η εικόνα ενός διαστήματος Δ μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης;

Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

33. Να διατυπώσετε για μια συνεχής συνάρτηση το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

Δηλαδή, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια, ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει

$$\mathbf{m \le f(x) \le M}, \quad \textbf{για κάθε} \quad \mathbf{x \in [\alpha,\beta]}.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Από το παραπάνω θεώρημα και το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών προκύπτει ότι το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[\alpha,\beta]$ είναι το κλειστό διάστημα $[m, M]$, όπου m η ελάχιστη τιμή και M η μέγιστη τιμή της. Τέλος, αποδεικνύεται ότι:

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) όπου

$A = \lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B = \lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$.

Αν, όμως, η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο (α,β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (B, A).

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

34. Τι ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(x_0, f(x_0))$; 2000

Έστω f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της C_f. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ένας πραγματικός αριθμός *λ*, τότε ορίζουμε ως εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Α, την ευθεία ε που διέρχεται από το *Α* και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ. Επομένως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι $y - f(x_0) = \lambda(x - x_0)$, όπου $\lambda = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

35. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; 2004, 2009

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Παρατήρηση

- Αν θέσουμε $x = x_0 + h$ τότε $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- Πολλές φορές το $h = x - x_0$ συμβολίζεται με Δx ενώ το $f(x_0 + h) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ συμβολίζεται με $\Delta f(x_0)$ οπότε $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x = x_0}$.

36. Πότε ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ;

Όταν ένα κινητό κινείται προς τα δεξιά, τότε κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} > 0$, οπότε είναι $\upsilon(t_0) \geq 0$, ενώ, όταν το κινητό κινείται προς τα αριστερά κοντά στο t_0 ισχύει $\dfrac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} < 0$,οπότε είναι $\upsilon(t_0) \leq 0$.

37. Πως ορίζεται η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού τη χρονική στιγμή t_0 ;

Η στιγμιαία ταχύτητα ενός κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, είναι η παράγωγος της συνάρτησης θέσης $x = s(t)$ τη χρονική στιγμή t_0. Δηλαδή $\upsilon(t_0) = s'(t_0)$.

38. Τι ονομάζεται κλίση της f στο x_0 και ποια είναι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο x_0 ;

Κλίση της f στο x_0 ή συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο x_0, ονομάζεται το $f'(x_0)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

39. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. 2023, 2022, 2018, 2013, 2007, 2003, 2000, 1999

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x)-f(x_0)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-f(x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)\right]=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=f'(x_0)\cdot 0=0$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

40. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της A;

Η f είναι παραγωγίσιμη στο A ή, απλά, παραγωγίσιμη, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in A$.

41. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της;

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα ανοικτό διάστημα (α,β) του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x_0 \in (\alpha,\beta)$.

42. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της; 2023, 2020, 2013, 2010

Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

43. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f; 2020
Πως ορίζεται η νιοστή παράγωγος μιας συνάρτησης f με $\nu \geq 3$;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x \in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $f': A_1 \to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f.

Η νιοστή παράγωγος της f με $\nu \geq 3$ συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$ και είναι: $f^{(\nu)}=\left[f^{(\nu-1)}\right]'$.

44. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{c-c}{x-x_0}=0$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$, δηλαδή $(c)'=0$.

45. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:
$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x-x_0}{x-x_0}=1$. Επομένως, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}1=1$, δηλαδή $(x)'=1$.

46. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}$.
1998

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x^\nu-x_0^\nu}{x-x_0}=$
$\dfrac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ \cdots\ +x_0^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ \cdots\ +x_0^{\nu-1}$,οπότε
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ \cdots\ +x_0^{\nu-1}\right)=x_0^{\nu-1}+x_0^{\nu-1}+\ \cdots\ +x_0^{\nu-1}=\nu x_0^{\nu-1}$ δηλαδή
$\left(x^\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

47. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
2005, 2009

Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:
$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\dfrac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$,οπότε
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Στο $x_0=0$ είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$, δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

48. Αν οι συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο $x_0\in A$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.
2023, 2020, 1989, 1985

Για $x\neq x_0$, ισχύει:
$\dfrac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ Επειδή οι

συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$ Δηλαδή $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Γενίκευση: $(f_1+f_2+...+f_k)'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_k'(x)$

49. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $f\cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Σημείωση

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Το προηγούμενο θεώρημα επεκτείνεται και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις. Έτσι για τις τρείς συναρτήσεις ισχύει: $(f(x)g(x)h(x))'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$

50. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0)\neq 0$, τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ; Ποια είναι η παράγωγός της στο σημείο αυτό;

Η $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

Αν οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ τότε $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$.

51. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{-\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=-\nu x^{-\nu-1}$, δηλαδή $\left(x^{-\nu}\right)'=-\nu x^{-\nu-1}$.

Για κάθε $x\neq 0$ έχουμε: $\left(x^{-\nu}\right)'=\left(\frac{1}{x^\nu}\right)'=\frac{(1)'x^\nu-1(x^\nu)'}{(x^\nu)^2}=\frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}}=-\nu x^{-\nu-1}$.

52. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x|\sigma\upsilon\nu x=0\}$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή $(\varepsilon\varphi x)'=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

53. Πότε η συνάρτηση $f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και πότε σε ένα διάστημα Δ;

Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$

Γενικά, αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'(g(x))g'(x)$.

Δηλαδή, αν $u = g(x)$, τότε $\left(f(u)\right)' = f'(u)u'$.

54. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, δηλαδή $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

Πράγματι, αν $y = x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$ και θέσουμε $u = \alpha \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = \left(e^u\right)' = e^u \cdot u' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

55. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $\alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha$, δηλαδή $\left(\alpha^x\right)' = \alpha^x \ln \alpha$

Πράγματι, αν $y = \alpha^x = e^{x \ln \alpha}$ και θέσουμε $u = x \ln \alpha$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln \alpha} \cdot \ln \alpha = \alpha^x \ln \alpha.$$

56. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}.$$

2008

– αν $x > 0$, τότε $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

– αν $x < 0$, τότε $\ln|x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.

Επομένως, $y' = \left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ και άρα $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$.

57. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, τι ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0;

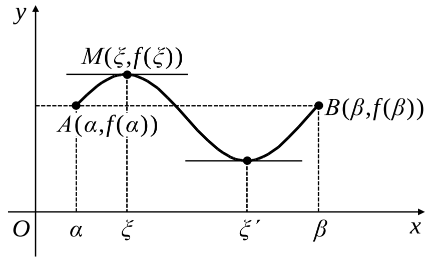
Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

58. Τι ονομάζεται οριακό κόστος παραγωγής x_0 μονάδων ενός προϊόντος;

Αν K είναι το κόστος παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η παράγωγος $K'(x_0)$ παριστάνει το ρυθμό μεταβολής του κόστους K ως προς την ποσότητα x, όταν $x = x_0$ και λέγεται οριακό κόστος στο x_0.

59. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
2007, 2012, 2020, 2021

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

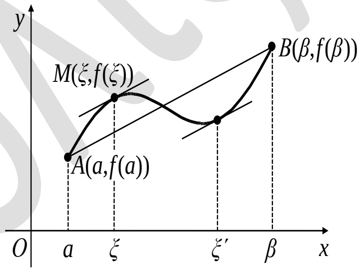
60. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέσης τιμής και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
2022, 2019, 2016, 2013, 2008, 2003

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$



Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας ΑΒ.

61. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- **η f είναι συνεχής στο Δ και**
- **$f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι:**

η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.
2021, 2014, 2009, 2004, 1996, 1994, 1989, 1987

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1,x_2\in\Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1=x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1<x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1,x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

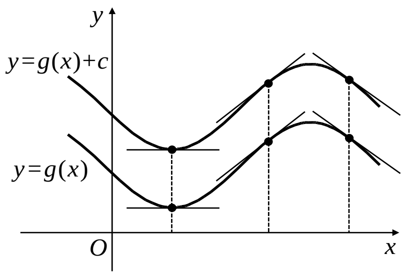
- Αν $x_2<x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1)=f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

62. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν
- **οι f,g είναι συνεχείς στο Δ και**
- **$f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει: $f(x)=g(x)+c$**

Η συνάρτηση $f-g$ *είναι* συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



63. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.

- **Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.**

2023, 2021, 2019, 2017, 2012, 1996

- **Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.**

Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

- Στην περίπτωση που είναι $f'(x) < 0$ εργαζόμαστε αναλόγως.

64. α) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

2012 2020

β) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

2015

α) Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.

β) Μία συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο**,** όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \ge f(x_0)$, για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού ελαχίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό ελάχιστο της f.

- Τα τοπικά μέγιστα και τα τοπικά ελάχιστα της f λέγονται τοπικά ακρότατα αυτής.

65. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

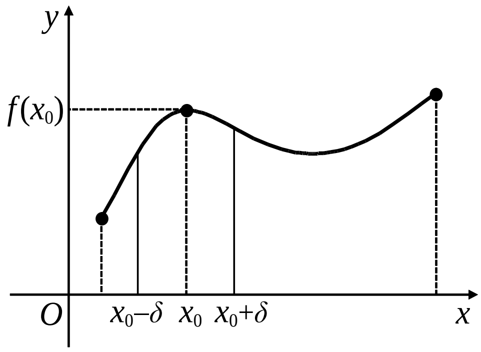
2011, 2004, 2013, 2016, 2017, 2019, 2022, 2023

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta$ και $f(x) \le f(x_0)$, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.(1)

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει



$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Επομένως,

— αν $x\in(x_0-\delta,x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0 \qquad (2)$$

— αν $x\in(x_0,x_0+\delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0. \qquad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0)=0$. Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

66. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακρότατων και ποια σημεία ονομάζονται κρίσιμα;
2013

Οι πιθανές θέσεις των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
1. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η παράγωγος της f μηδενίζεται.
2. Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
3. Τα άκρα του Δ (αν ανήκουν στο πεδίο ορισμού της).
Τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ.

67. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι:
i) Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.
2020, 2019, 2016, 1986
ii) Αν $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

i) Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0]$.(1)
Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε: $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in[x_0,\beta)$.(2)
Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x)\leq f(x_0)$, για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.
ii) Εργαζόμαστε αναλόγως.

68. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).
2014, 2018

Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (\alpha,\beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (\alpha, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha, x_0]$, ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$,ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).
Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$.

69. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ, πότε θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και πότε προς τα κάτω;

2006, 2010, 2014

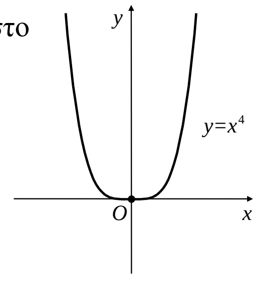
Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι:

- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.
- Η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ.

70. Με βάση ποιο θεώρημα εξετάζουμε την κυρτότητα μιας συνάρτησης f; Ισχύει το αντίστροφό του; Δώστε παράδειγμα.

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ’ ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.

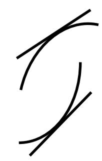
- Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο *x* του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ
- Αν $f''(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο *x* του Δ, τότε η f είναι κοίλη στο Δ.



Το αντίστροφο του θεωρήματος δεν ισχύει. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4$. Επειδή η $f'(x) = 4x^3$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η $f(x) = x^4$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.Εντούτοις, η f'' δεν είναι θετική στο 0 αφού $f''(0) = 0$.

71. Ποια είναι η σχετική θέση της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f με μία εφαπτομένη της με βάση τη κυρτότητα της συνάρτησης f;

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή (αντιστοίχως κοίλη) σ’ ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται “κάτω” (αντιστοίχως “πάνω”) από τη γραφική της παράσταση , με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.



72. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0.
Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$,

τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

73. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής;
Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της, τότε ποια σχέση ισχύει για τη δεύτερη παράγωγο της f στο x_0 ;
Πότε ένα σημείο είναι βέβαιο σημείο καμπής; 2017

Οι πιθανές θέσεις σημείων καμπής μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ είναι:
i) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία η f'' μηδενίζεται, και
ii) τα εσωτερικά σημεία του Δ στα οποία δεν υπάρχει η f''.
Αν το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, τότε $f''(x_0)=0$.
Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα (α,β) και $x_0 \in (\alpha,\beta)$. Αν

- η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 και
- ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$

τότε το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής.

74. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f;
2010, 2003, 2015, 2020, 2022

Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$, τότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

75. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$); 2007, 2016, 2023

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ (αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$), τότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$).

76. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, (αντιστοίχως στο $-\infty$); 2005, 2011, 2022

Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$, αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0$.

Θεώρημα: Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αντιστοίχως στο $-\infty$, αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$ αντιστοίχως $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lambda\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\beta\in\mathbb{R}$

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αποδεικνύεται ότι:
— Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
— Οι ρητές συναρτήσεις $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή $P(x)$ μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή, δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.
— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.
—Στο $+\infty$, $-\infty$,εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha,+\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty,\alpha)$.

77. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L’ Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ και υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

78. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ; 2006, 2011, 2014, 2019

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

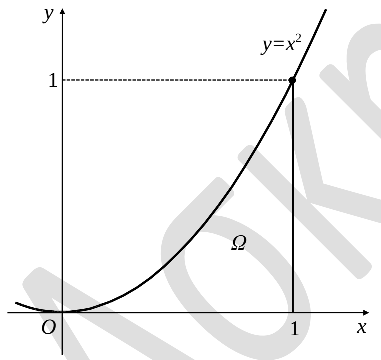
79. Να αποδείξετε ότι:
Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε
- **όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και**
- **κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$.**

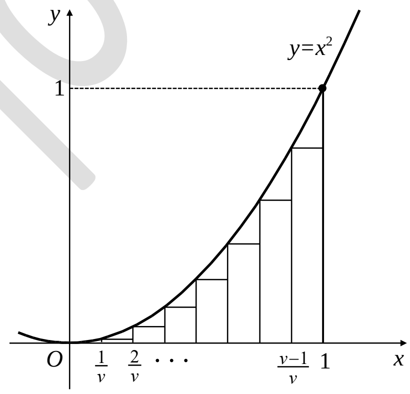
2022, 2015, 2010, 2003, 2001, 1998

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, όπου $c\in\mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ, αφού $G'(x)=(F(x)+c)'=F'(x)=f(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$ και $G'(x)=f(x)$, οπότε $G'(x)=F'(x)$, για κάθε $x\in\Delta$.
  Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x)=F(x)+c$, για κάθε $x\in\Delta$.

80. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι $E(\Omega)=\frac{1}{3}$.





Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{1}{\nu}$, με άκρα τα σημεία:

$$x_0=0,\quad x_1=\frac{1}{\nu},\quad x_2=\frac{2}{\nu},\ \ldots\ldots\ldots,\quad x_{\nu-1}=\frac{\nu-1}{\nu},\quad x_\nu=\frac{\nu}{\nu}=1.$$

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_ν, των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\varepsilon_\nu=f(0)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+\cdots+f\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

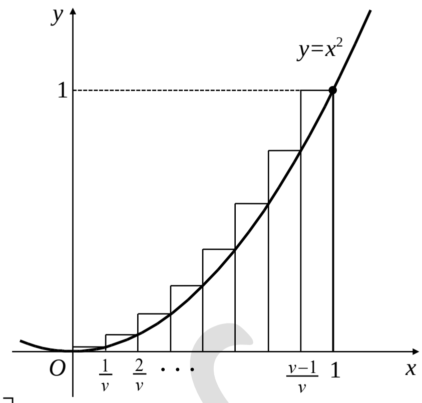
$$=\frac{1}{\nu}\left[0^2+\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\left(\frac{2}{\nu}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\nu^3}[1^2+2^2+\cdots+(\nu-1)^2]=\frac{1}{\nu^3}\frac{(\nu-1)\cdot\nu(2\nu-1)}{6}=\frac{2\nu^2-3\nu+1}{6\nu^2}.$$

- Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_\nu=f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+\cdots+f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}$$

των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού. Είναι όμως,



$$E_\nu=f\left(\frac{1}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+f\left(\frac{2}{\nu}\right)\frac{1}{\nu}+\cdots+f\left(\frac{\nu}{\nu}\right)\cdot\frac{1}{\nu}=\frac{1}{\nu}\left[\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\left(\frac{2}{\nu}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\nu}{\nu}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\nu^3}(1^2+2^2+\cdots+\nu^2)=\frac{1}{\nu^3}\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}=\frac{2\nu^2+3\nu+1}{6\nu^2}.$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν Ε βρίσκεται μεταξύ των ε_ν και E_ν. Δηλαδή ισχύει

$\varepsilon_\nu\le E\le E_\nu$, οπότε $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu\le E\le\lim\limits_{\nu\to\infty}E_\nu$. Επειδή $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varepsilon_\nu=\lim\limits_{\nu\to\infty}E_\nu=\frac{1}{3}$, έχουμε $E=\frac{1}{3}$.

81. Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x)\ge 0$, τον άξονα x΄x και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

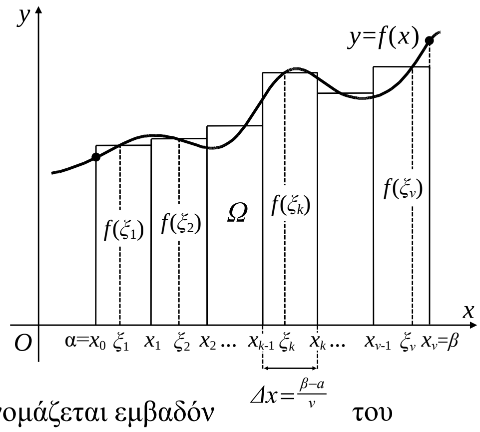
Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$, με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$.

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{\kappa-1},x_\kappa]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_κ και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_\kappa)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι

$$S_\nu=f(\xi_1)\Delta x+f(\xi_2)\Delta x+\cdots+f(\xi_\nu)\Delta x=$$
$$[f(\xi_1)+\cdots+f(\xi_\nu)]\Delta x$$

- Υπολογίζουμε το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}S_\nu$.



Αποδεικνύεται ότι το $\lim\limits_{\nu\to+\infty}S_\nu$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_κ. Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega)\ge 0$.

82. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha,\beta]$.

Με τα σημεία $\alpha=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_\nu=\beta$

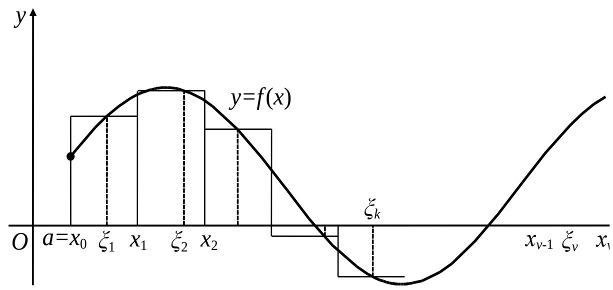
χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ σε ν ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_\kappa \in [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, για κάθε $\kappa \in \{1,2,...,\nu\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$S_\nu = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \cdots + f(\xi_\kappa)\Delta x + \cdots + f(\xi_\nu)\Delta x$

το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x$ (1) .Αποδεικνύεται ότι,

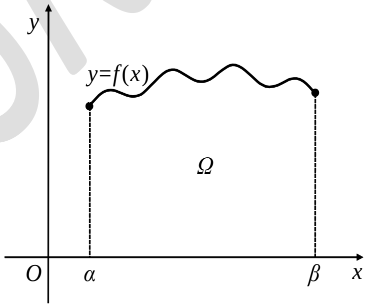


"Το όριο του αθροίσματος S_ν, δηλαδή το $\lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$ (1) υπάρχει στο $\mathbb{R}$ και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_κ".

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης f από το α στο β, συμβολίζεται με $\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(x)dx}$ και διαβάζεται "ολοκλήρωμα της f από το α στο β". Δηλαδή, $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \lim_{\nu\to\infty}\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\xi_\kappa)\Delta x\right)$.

Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.



Δηλαδή, $\boldsymbol{\int_\alpha^\beta f(x)dx = E(\Omega)}$.

Επομένως Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$

83. Ποιες οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$
- $\int_\alpha^\beta [f(x) + g(x)]dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά
- $\int_\alpha^\beta [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx + \mu\int_\alpha^\beta g(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$.

84. Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;

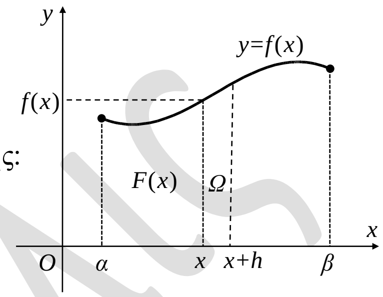
$\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$ όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

85. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής;

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)dx = \int_{u_1}^{u_2} f\left(u\right)du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g\left(x\right)$, $du = g'\left(x\right)dx$ και $u_1 = g\left(\alpha\right)$, $u_2 = g\left(\beta\right)$.

86. Αν f μια συνεχής συνάρτηση σ΄ ένα διάστημα Δ και α ένα σημείο του Δ, να γράψετε τι γνωρίζετε για την συνάρτηση $F\left(x\right) = \int_{\alpha}^{x} f\left(t\right)dt$.



Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, δηλαδή

$F'\left(x\right) = \left(\int_{\alpha}^{x} f\left(t\right)dt\right)' = f\left(x\right)$ για κάθε $x \in \Delta$.

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$F(x+h) - F(x) = \int_{x}^{x+h} f(t)dt =$ Εμβαδόν του χωρίου $\Omega \approx f(x)\cdot h$,για μικρά $h > 0$. Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$,οπότε

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

87. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.
2002, 2013, 2008, 2018

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $\left[\alpha,\beta\right]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $\left[\alpha,\beta\right]$, τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(t\right)dt = G\left(\beta\right) - G\left(\alpha\right)$.

Απόδειξη

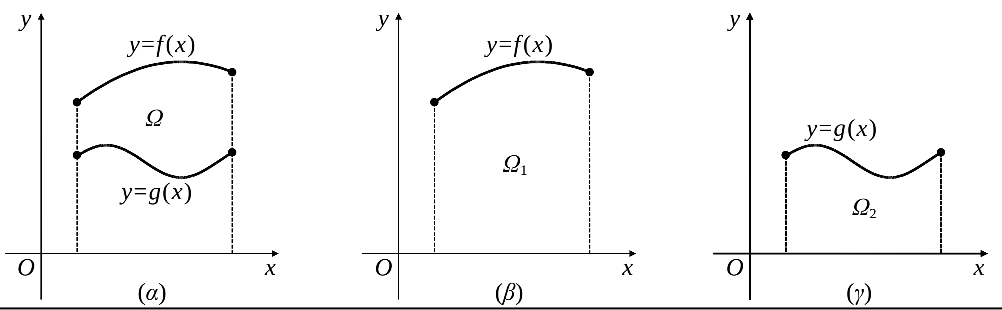
Η συνάρτηση $F\left(x\right) = \int_{\alpha}^{x} f\left(t\right)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $\left[\alpha,\beta\right]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $\left[\alpha,\beta\right]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G\left(x\right) = F\left(x\right) + c$. (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G\left(\alpha\right) = F\left(\alpha\right) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f\left(t\right)dt + c = c$, οπότε $c = G\left(\alpha\right)$.

Επομένως, $G\left(x\right) = F\left(x\right) + G\left(\alpha\right)$ οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$G\left(\beta\right) = F\left(\beta\right) + G\left(\alpha\right) = \int_{\alpha}^{\beta} f\left(t\right)dt + G\left(\alpha\right)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f\left(t\right)dt = G\left(\beta\right) - G\left(\alpha\right)$.

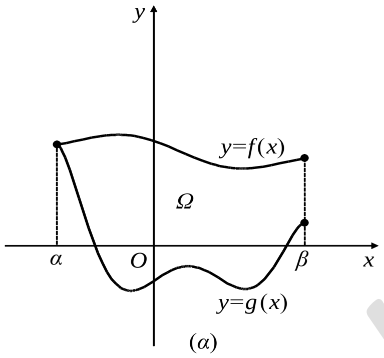
88. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g, και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta}(f(x) - g(x))dx$



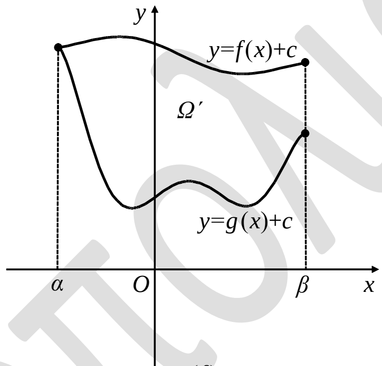
Παρατηρούμε ότι $E(\Omega)=E(\Omega_1)-E(\Omega_2)=\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx=\int_\alpha^\beta \big(f(x)-g(x)\big)dx$. Επομένως,
$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta \big(f(x)-g(x)\big)dx$.

89. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g, συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $g(x)\le f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f,g, και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta \big(f(x)-g(x)\big)dx$.

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, θα υπάρχει αριθμό $c\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)+c\ge g(x)+c\ge 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'



(α)



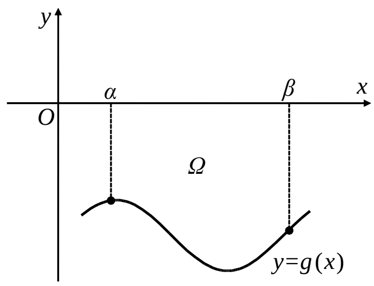
(β)

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε
$E(\Omega)=E(\Omega')=\int_\alpha^\beta[(f(x)+c)-(g(x)+c)]dx=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$.Άρα $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx$.

90. Έστω, μια συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, του άξονα x΄x και τις ευθείες x = α και x = β είναι: $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=0$, έχουμε

$$E(\Omega)=\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx=$$
$$\int_\alpha^\beta[-g(x)]dx=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$$



Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$,
τότε $E(\Omega)=-\int_\alpha^\beta g(x)dx$