ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει, $f'(\xi) = 0$, οπότε $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow$ $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$.
Άρα σε όλες τις περιπτώσεις $f(x_1) = f(x_2)$.

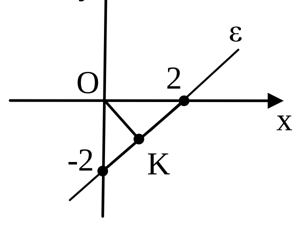
Β. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Δηλαδή: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Γ. **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Λ

ΘΕΜΑ 2ο

Α. **α.** Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $x = 2\lambda + 1$ και $y = 2\lambda - 1$. Με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει: $x - y = 2\lambda + 1 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$.
Οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται επί της ευθείας ε: $y = x - 2$.

β. Έστω ΟΚ η απόσταση της ευθείας ε από την αρχή Ο των αξόνων. Ο μιγαδικός z_0 με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το σημείο Κ. Επειδή $\lambda_\varepsilon = 1$ και $\varepsilon \perp OK$, ισχύει: $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OK} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1$. Άρα η ΟΚ έχει εξίσωση $y = -x$. Οι συντεταγμένες του σημείου Κ είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ε, ΟΚ. Είναι



$$\begin{cases} y = x-2 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x-2 \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2x \\ y=-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y=-1 \end{cases}, \text{ άρα } K(1,-1)$$

και $z_0 = 1-i$

Β. Έστω $w = \alpha + \beta i$, τότε:

$$|w|^2 + \overline{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow (\alpha^2+\beta^2+\alpha-12) - \beta i = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2+\alpha-12 = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+1+\alpha-12 = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2+\alpha-12 = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \text{ ή } \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Άρα $w = -4 + i$ ή $w = 3 + i$

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Παρατηρούμε ότι $f(0) = \alpha^0 - \ln 1 = 0$, άρα $f(x) \geq f(0)$. Δηλαδή η f παρουσιάζει ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $f'(x) = \alpha^x \ln\alpha - \dfrac{1}{x+1}$, λόγω του θεωρήματος Fermat, ισχύει ότι: $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha - \dfrac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$.

Β. Για $\alpha = e$ είναι $f(x) = e^x - \ln(x+1)$, $x > -1$.

α. Είναι $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1}$ και $f''(x) = e^x + \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, η f είναι κυρτή.

β. Επειδή $f''(x) > 0$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1,+\infty)$, οπότε για κάθε $-1 < x < 0$ είναι $f'(x) < f'(0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$.

Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) > f'(0) = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

γ. $\dfrac{f(\beta)-1}{x-1} + \dfrac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$, $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Έστω $g(x) = (x-2)(f(\beta)-1) + (x-1)(f(\gamma)-1)$, $x \in [1,2]$.

Η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $g(1) = (1-2)(f(\beta)-1) + (1-1)(f(\gamma)-1) = 1 - f(\beta)$ και

$g(2) = (2-2)(f(\beta)-1) + (2-1)(f(\gamma)-1) = f(\gamma) - 1$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$, για κάθε $-1 < x < 0$ είναι $f(x) > f(0) = 1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, για κάθε $x > 0$ είναι $f(x) > f(0) = 1$.

Άρα $f(x) > 1$ για κάθε $x \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, οπότε και $f(\beta) > 1 \Leftrightarrow 1 - f(\beta) < 0 \Leftrightarrow g(1) < 0$ και $f(\gamma) > 1 \Leftrightarrow f(\gamma) - 1 > 0 \Leftrightarrow g(2) > 0$.

Επειδή $g(1)g(2) < 0$, λόγω του θεωρήματος Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$g(x_0)=0 \Leftrightarrow (x_0-2)\left(f(\beta)-1\right)+(x_0-1)\left(f(\gamma)-1\right)=0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta)-1}{x_0-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x_0-2}=0.$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή οι συναρτήσεις $f(t)$ και $tf(t)$ είναι συνεχείς στο $(0,2]$, οι συναρτήσεις $\int_0^x tf(t)dt$ και $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες, οπότε η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2]$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα η G είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xf(x)}{1}=0$, είναι

$\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x}-\int_0^x f(t)dt+3\right)=3$ και

$$G(0)=6\lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2}=6\lim_{t\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)}=6\lim_{t\to 0}\frac{1-1+t^2}{t^2\left(1+\sqrt{1-t^2}\right)} \Leftrightarrow$$

$G(0)=6\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-t^2}}=6\dfrac{1}{2}=3$. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}G(x)=G(0)$ η G είναι συνεχής στο 0, οπότε είναι συνεχής στο $[0,2]$.

β. Όπως είδαμε στο προηγούμενο σκέλος η G είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2]$ οπότε και στο $(0,2)$

με $G'(x)=\left(\dfrac{H(x)}{x}-\int_0^x f(t)dt+3\right)'=\dfrac{xH'(x)-H(x)}{x^2}-f(x) \Leftrightarrow$

$$G'(x)=\frac{x^2f(x)-H(x)}{x^2}-f(x)=f(x)-\frac{H(x)}{x^2}-f(x)=-\frac{H(x)}{x^2}$$

γ. Είναι $G(0)=3$ και $G(2)=\dfrac{\int_0^2 tf(t)dt}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=\dfrac{\int_0^2 tf(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt}{2}+3$.

Όμως $\int_0^2 (t-2)f(t)\,dt=0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt=0$, άρα $G(2)=3$, δηλαδή $G(0)=G(2)$.
Επειδή η G είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$, λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\alpha\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $G'(\alpha)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0 \Leftrightarrow H(\alpha)=0$.

δ. Η G ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα $[0,\alpha]$, οπότε υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιος, ώστε:

$$G'(\xi)=\frac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha-0}\Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha}-\int_0^{\alpha}f(t)dt+3-3}{\alpha}\Leftrightarrow -\frac{\int_0^{\xi}tf(t)dt}{\xi^2}=\frac{-\int_0^{\alpha}f(t)dt}{\alpha}\Leftrightarrow$$

$$\alpha\int_0^{\xi}tf(t)dt=\xi^2\int_0^{\alpha}f(t)dt$$

Στέλιος Μιχαήλογλου