

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
 ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ  
 ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**  
**ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009**  
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει  $f(x_1) = f(x_2)$ .

- Αν  $x_1 = x_2$ , τότε προφανώς  $f(x_1) = f(x_2)$ .

- Αν  $x_1 < x_2$ , τότε στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  η  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης

τιμής. Επομένως υπάρχει  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ .

Επειδή το  $\xi$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ , ισχύει,  $f'(\xi) = 0$ , οπότε  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow$

$f(x_1) = f(x_2)$ . Αν  $x_1 > x_2$ , τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι  $f(x_1) = f(x_2)$ .

Άρα σε όλες τις περιπτώσεις  $f(x_1) = f(x_2)$ .

**B.** Μια συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, αν

υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό ονομάζεται

παράγωγος της  $f$  στο  $x_0$  και συμβολίζεται με  $f'(x_0)$ . Δηλαδή:  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

**Γ. α. Σ**

**β. Σ**

**γ. Λ**

**δ. Λ**

**ε. Λ**

**ΘΕΜΑ 2ο**

**A. α.** Έστω  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Τότε  $x = 2\lambda + 1$  και  $y = 2\lambda - 1$ . Με αφαίρεση κατά μέλη

προκύπτει:  $x - y = 2\lambda + 1 - 2\lambda + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$ .

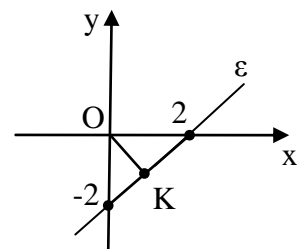
Οι εικόνες των μιγαδικών  $z$  βρίσκονται επί της ευθείας  $\varepsilon: y = x - 2$ .

**β.** Έστω  $OK$  η απόσταση της ευθείας  $\varepsilon$  από την αρχή  $O$  των αξόνων.

Ο μιγαδικός  $z_0$  με το ελάχιστο μέτρο έχει εικόνα το σημείο  $K$ .

Επειδή  $\lambda_\varepsilon = 1$  και  $\varepsilon \perp OK$ , ισχύει:  $\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OK} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -1$ .

Άρα η  $OK$  έχει εξίσωση  $y = -x$ . Οι συντεταγμένες του σημείου  $K$  είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των  $\varepsilon, OK$ . Είναι



$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2x \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}, \text{ \u0391\u03c1\u03b1 } K(1, -1)$$

και  $z_0 = 1 - i$

**B.** \u038c\u03c3\u03c4\u03c9  $w = \alpha + \beta i$ , \u03c4\u03cc\u03c4\u03b5:

$$|w|^2 + \bar{w} - 12 = z_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i \Leftrightarrow (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 12) - \beta i = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \alpha - 12 = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + 1 + \alpha - 12 = 1 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \alpha - 12 = 0 \\ \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \text{ \u0397 } \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

\u038c\u03c1\u03b1  $w = -4 + i$  \u0397  $w = 3 + i$

### \u0398\u0395\u039c\u0391 3\u03c9

**A.** \u03a0\u03b1\u03c1\u03b1\u03c4\u03b7\u03c1\u03cc\u03c5\u03bc\u03b5 \u03cc\u03c4\u03b9  $f(0) = \alpha^0 - \ln 1 = 0$ , \u03b1\u03c1\u03b1  $f(x) \geq f(0)$ . \u0394\u03b7\u03bb\u03b1\u03b4\u03b7 \u03b7  $f$  \u03c0\u03b1\u03c1\u03bf\u03c5\u03c3\u03b9\u03ac\u03b6\u03b5\u03b9 \u03b5\u03bb\u03ac\u03c7\u03b9\u03c3\u03c4\u03bf \u03c3\u03c4\u03bf \u03b5\u03c3\u03c9\u03c4\u03b5\u03c1\u03b9\u03ba\u03cc \u03c3\u03b7\u03bc\u03b5\u03b9\u03cc  $x_0 = 0$  \u03c4\u03bf\u03c5 \u03c0\u03b5\u03b4\u03b9\u03bf\u03c5 \u03bf\u03c1\u03b9\u03c3\u03bc\u03cc\u03c5 \u03c4\u03b7\u03c3.

\u038c\u03c0\u03b5\u03b4\u03b9\u03b4\u03b7 \u03b7  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03b3\u03c9\u03b3\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b7 \u03c3\u03c4\u03bf  $(-1, +\infty)$  \u03bc\u03b5  $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - \frac{1}{x+1}$ , \u03bb\u03cc\u03b3\u03c9 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1\u03c4\u03bf\u03c3

Fermat, \u03b9\u03c3\u03c7\u03c5\u03b5\u03b9 \u03cc\u03c4\u03b9:  $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln \alpha - \frac{1}{0+1} = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = e$ .

**B.** \u0393\u03b9\u03b1  $\alpha = e$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1  $f(x) = e^x - \ln(x+1)$ ,  $x > -1$ .

**\u03b1.** \u038c\u03b9\u03bd\u03b1  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$  \u03ba\u03b9  $f''(x) = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$ .

\u038c\u03c0\u03b5\u03b4\u03b9\u03b4\u03b7  $f''(x) > 0$  \u03b3\u03b9\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5  $x > -1$ , \u03b7  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03ba\u03c5\u03c1\u03c4\u03b7.

**\u03b2.** \u038c\u03c0\u03b5\u03b4\u03b9\u03b4\u03b7  $f''(x) > 0$ , \u03b7  $f'$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b3\u03bd\u03b7\u03c3\u03b9\u03c9\u03c3 \u03b1\u03cd\u03be\u03bf\u03c5\u03c3\u03b1 \u03c3\u03c4\u03bf  $(-1, +\infty)$ , \u03cc\u03c0\u03cc\u03c4\u03b5 \u03b3\u03b9\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5  $-1 < x < 0$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1  $f'(x) < f'(0) = 0$ , \u03b1\u03c1\u03b1 \u03b7  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b3\u03bd\u03b7\u03c3\u03b9\u03c9\u03c3 \u03c6\u03b7\u03bd\u03b9\u03c5\u03c3\u03b1 \u03c3\u03c4\u03bf  $(-1, 0]$ .

\u0393\u03b9\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5  $x > 0$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1  $f'(x) > f'(0) = 0$ , \u03b1\u03c1\u03b1 \u03b7  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b3\u03bd\u03b7\u03c3\u03b9\u03c9\u03c3 \u03b1\u03cd\u03be\u03bf\u03c5\u03c3\u03b1 \u03c3\u03c4\u03bf  $[0, +\infty)$ .

**\u03b3.**  $\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(f(\beta) - 1) + (x - 1)(f(\gamma) - 1) = 0$ ,  $x \neq 1$  \u03ba\u03b9  $x \neq 2$ .

\u038c\u03c3\u03c4\u03c9  $g(x) = (x - 2)(f(\beta) - 1) + (x - 1)(f(\gamma) - 1)$ ,  $x \in [1, 2]$ .

\u0397  $g$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c3\u03c5\u03bd\u03b5\u03c7\u03b7\u03c3 \u03c3\u03c4\u03bf \u03b4\u03b9\u03ac\u03c3\u03c4\u03b7\u03bc\u03b1  $[1, 2]$  \u03c9\u03c3 \u03ac\u03b8\u03c1\u03bf\u03b9\u03c3\u03bc\u03b1 \u03c3\u03c5\u03bd\u03b5\u03c7\u03c9\u03bd \u03c3\u03c5\u03bd\u03b1\u03c1\u03c4\u03b7\u03c3\u03b5\u03c9\u03bd.

\u038c\u03b9\u03bd\u03b1  $g(1) = (1 - 2)(f(\beta) - 1) + (1 - 1)(f(\gamma) - 1) = 1 - f(\beta)$  \u03ba\u03b9

$g(2) = (2 - 2)(f(\beta) - 1) + (2 - 1)(f(\gamma) - 1) = f(\gamma) - 1$ .

\u038c\u03c0\u03b5\u03b4\u03b9\u03b4\u03b7 \u03b7  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b3\u03bd\u03b7\u03c3\u03b9\u03c9\u03c3 \u03c6\u03b7\u03bd\u03b9\u03c5\u03c3\u03b1 \u03c3\u03c4\u03bf  $(-1, 0]$ , \u03b3\u03b9\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5  $-1 < x < 0$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1  $f(x) > f(0) = 1$  \u03ba\u03b9

\u03b5\u03c0\u03b5\u03b4\u03b9\u03b4\u03b7 \u03b7  $f$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b3\u03bd\u03b7\u03c3\u03b9\u03c9\u03c3 \u03b1\u03cd\u03be\u03bf\u03c5\u03c3\u03b1 \u03c3\u03c4\u03bf  $[0, +\infty)$ , \u03b3\u03b9\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5  $x > 0$  \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1  $f(x) > f(0) = 1$ .

\u038c\u03c1\u03b1  $f(x) > 1$  \u03b3\u03b9\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5  $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ , \u03cc\u03c0\u03cc\u03c4\u03b5 \u03ba\u03b9  $f(\beta) > 1 \Leftrightarrow 1 - f(\beta) < 0 \Leftrightarrow g(1) < 0$  \u03ba\u03b9

$f(\gamma) > 1 \Leftrightarrow f(\gamma) - 1 > 0 \Leftrightarrow g(2) > 0$ .

\u038c\u03c0\u03b5\u03b4\u03b9\u03b4\u03b7  $g(1)g(2) < 0$ , \u03bb\u03cc\u03b3\u03c9 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03b8\u03b5\u03c9\u03c1\u03b7\u03bc\u03b1\u03c4\u03bf\u03c3 Bolzano, \u03c5\u03c0\u03ac\u03c1\u03c7\u03b5\u03b9  $x_0 \in (1, 2)$  \u03c4\u03b5\u03c4\u03cc\u03b9\u03bf, \u03c9\u03c3\u03c4\u03b5

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)(f(\beta) - 1) + (x_0 - 1)(f(\gamma) - 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - 1}{x_0 - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x_0 - 2} = 0.$$

### ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή οι συναρτήσεις  $f(t)$  και  $tf(t)$  είναι συνεχείς στο  $(0, 2]$ , οι συναρτήσεις  $\int_0^x tf(t)dt$  και  $\int_0^x f(t)dt$  είναι παραγωγίσιμες, οπότε η  $G$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 2]$  ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα η  $G$  είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό.

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xf(x)}{1} = 0, \text{ είναι}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right) = 3 \text{ και}$$

$$G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-t^2})(1 + \sqrt{1-t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + t^2}{t^2(1 + \sqrt{1-t^2})} \Leftrightarrow$$

$$G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-t^2}} = 6 \frac{1}{2} = 3. \text{ Επειδή } \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) \text{ η } G \text{ είναι συνεχής στο } 0, \text{ οπότε είναι συνεχής στο } [0, 2].$$

β. Όπως είδαμε στο προηγούμενο σκέλος η  $G$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, 2]$  οπότε και στο  $(0, 2)$

$$\text{με } G'(x) = \left( \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right)' = \frac{xH'(x) - H(x)}{x^2} - f(x) \Leftrightarrow$$

$$G'(x) = \frac{x^2 f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = f(x) - \frac{H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2}$$

$$\gamma. \text{ Είναι } G(0) = 3 \text{ και } G(2) = \frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \frac{\int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt}{2} + 3.$$

$$\text{Όμως } \int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt - 2\int_0^2 f(t)dt = 0, \text{ άρα } G(2) = 3, \text{ δηλαδή } G(0) = G(2).$$

Επειδή η  $G$  είναι συνεχής στο  $[0, 2]$  και παραγωγίσιμη στο  $(0, 2)$ , λόγω του θεωρήματος Rolle,

$$\text{υπάρχει } \alpha \in (0, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } G'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow H(\alpha) = 0.$$

δ. Η  $G$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο διάστημα  $[0, \alpha]$ , οπότε υπάρχει  $\xi \in (0, \alpha)$  τέτοιος, ώστε:

$$G'(\xi) = \frac{G(\alpha) - G(0)}{\alpha - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(\alpha)}{\alpha} - \int_0^\alpha f(t) dt + 3 - 3}{\alpha} \Leftrightarrow -\frac{\int_0^\xi tf(t) dt}{\xi^2} = \frac{-\int_0^\alpha f(t) dt}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\alpha \int_0^\xi tf(t) dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t) dt$$

Στέλιος Μιχαήλογλου

askisopolis