Επαναληπτικά Διαγωνίσματα
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
της Γ΄ Λυκείου
από το Askisopolis
2024 - 2025

Αντώνης Βαλέργας
Γαβρήλος Ελευθερίου
Αποστόλης Κακαβάς
Στέλιος Μιχαήλογλου
Άγγελος Μπλιάς
Θανάσης Νικολόπουλος
Δημήτρης Πατσιμάς
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Νίκος Σαμπάνης
Βαγγέλης Τόλης
Νίκος Τούντας
Ισαάκ Χιονίδης


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου
8ο Διαγώνισμα
Ύλη: έως και το θεώρημα Rolle.

19-1-2025

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x$, $\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\alpha^x\ln\alpha$,

7 μονάδες

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

4 μονάδες

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

1+3 μονάδες

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν ο άξονα x΄x εφάπτεται στην γραφική παράσταση μία συνάρτησης f στην αρχή των αξόνων τότε $f(0)=f'(0)=0$.

β) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0)<0$, τότε η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x οξεία γωνία.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

δ) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της εξίσωσης $f'(x)=0$, υπάρχει το πολύ μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε $f'(x_0)=\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που διέρχονται από το σημείο Α(0, - 1).

6 μονάδες

Β2. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$, $x\in\mathbb{R}$ και $h(x)=x^{f(x)}$, $x>0$.

Να αποδείξετε ότι $3g'(-1)+2h'(1)=0$.

6 μονάδες

Β3. Να αποδείξετε ότι $\left(f(\eta\mu x)\right)''+4f(\eta\mu x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

6 μονάδες

Β4. Ένα κινητό Μ ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της C_f με $x\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

7 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x)=x^4+x^3-1,\quad h(x)=4x^5+5x^4-20x+2025 \text{ και } \quad f(x)=\frac{(x^4+x^3-1)(x^{2024}+1)}{x^4+x^2+2}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η g έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο (-2,1).

4 μονάδες

Αν η g έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες , οι οποίες βρίσκονται στο (-2,1),

Γ2. να αποδείξετε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$.

4 μονάδες

Γ3. να υπολογίστε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2)x^3+g(0,2021)x+3}{g(0)x^2+331\pi x+3}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(2)+g(2024)+g(2025)}{g^2(0)x^2+x^4}$.

6 μονάδες

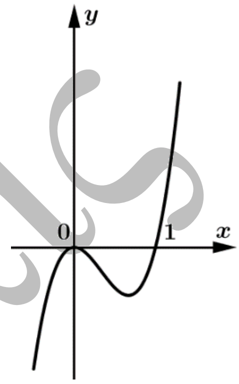
Γ4. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h έχει το πολύ τρείς διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

5 μονάδες

Γ5. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα.

6 μονάδες

Θέμα Δ

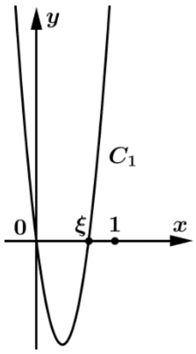


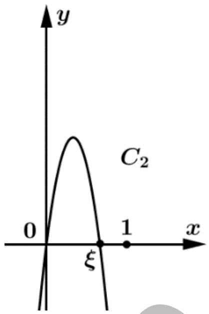
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $x\in\mathbb{R}$ με $\alpha>0$, $\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ η οποία εφάπτεται στο άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων.

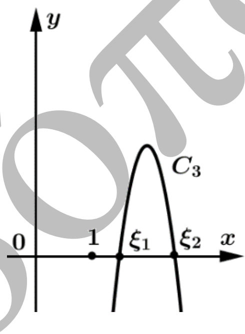
Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\alpha x^2(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

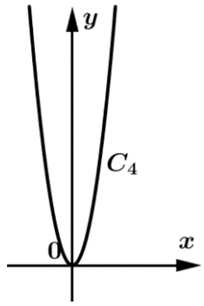
6 μονάδες

Δ2. Παρακάτω δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 και C_4, μία εκ των οποίων παριστάνει την γραφική παράσταση της παραγώγου της f. Να βρείτε την γραφική παράσταση της f', δικαιολογώντας την απάντησή σας.









5 μονάδες

Δ3. Να αποδείξετε ότι:

α) Η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση στο $(1,+\infty)$, χωρίς χρήση της γραφικής παράστασης.

β) Η εξίσωση $(f(x)-\alpha)\left[(e^x-e^2)(\eta\mu(x-1)+1)-xe^x+xe^2\right]=0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο διάστημα $[1,2]$.

4 + 6 = 10 μονάδες

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{|x|-x}$.

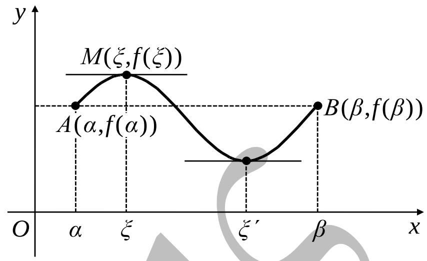
4 μονάδες

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Αν $y=\alpha^x=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε έχουμε $y=e^u$. Επομένως,
$y'=(e^u)'=e^u\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^x\ln\alpha$.



Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$.
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Α3. α) Αληθής
β) Αν ήταν $f(\alpha)=f(\beta)$ τότε λόγω του θεωρήματος Rolle θα υπήρχε $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$ που είναι άτοπο.

Α4. α) Σ **β)** Λ **γ)** Σ **δ)** Σ **ε)** Σ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x$.
Έστω $K(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f. Η εφαπτομένη της C_f στο K έχει εξίσωση:
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-x_0^2=2x_0(x-x_0)\Leftrightarrow y=2x_0x-x_0^2$ (1)
Η (1) διέρχεται από το σημείο Α, όταν $-1=2x_0\cdot 0-x_0^2\Leftrightarrow x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=\pm1$.
Οι ζητούμενες εφαπτομένες έχουν εξισώσεις:
$y=2\cdot1\cdot x-1^2\Leftrightarrow y=2x-1$ και $y=2\cdot(-1)\cdot x-(-1)^2\Leftrightarrow y=-2x-1$.

Β2. Είναι $g(x)=\sqrt[3]{x^2}=\begin{cases}|x|^{\frac{2}{3}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}=\begin{cases}x^{\frac{2}{3}}, & x>0\\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & x<0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Για x < 0 είναι $g'(x)=\left((-x)^{\frac{2}{3}}\right)'=\frac{2}{3}(-x)^{\frac{2}{3}-1}(-x)'=-\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{-x}}=-\frac{2}{3\sqrt[3]{-x}}$, οπότε
$g'(-1)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{1}}=-\frac{2}{3}$.

Είναι $h(x)=x^{f(x)}=x^{x^2}=e^{\ln x^{x^2}}=e^{x^2\ln x}$, x >0.
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με
$h'(x)=e^{x^2\ln x}(x^2\ln x)'=e^{x^2\ln x}\left(2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}\right)=e^{x^2\ln x}(2x\ln x+x)$.

Είναι $h'(1)=1$ οπότε $3g'(-1)+2h'(1)=3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot1=-2+2=0$.

Β3. Είναι $f(\eta\mu x)=\eta\mu^2 x,\ x\in\mathbb{R}$, $\left(f(\eta\mu x)\right)'=\left(\eta\mu^2 x\right)'=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και

$\left(f(\eta\mu x)\right)''=(2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x)'=2\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+2\eta\mu x\cdot(-\eta\mu x)=2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu^2 x$.

Είναι $\left(f(\eta\mu x)\right)''+4f(\eta\mu x)=2\sigma\upsilon\nu^2 x-2\eta\mu^2 x+4\eta\mu^2 x=2\sigma\upsilon\nu^2 x+2\eta\mu^2 x=2\left(\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=2\cdot 1=2$.

Β4. Έστω $M\left(x(t),y(t)\right)$ με $x(t)>0$ και $y(t)=x^2(t)$.

Είναι $y'(t)=\left(x^2(t)\right)'=2x(t)x'(t)$.

Έστω $t=t_0$ η χρονική στιγμή κατά την οποία το Μ διέρχεται από το σημείο $M\left(x(t_0),y(t_0)\right)$ στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του, τότε

$$y'(t_0)=x'(t_0)\Leftrightarrow 2x(t_0)\cancel{x'(t_0)}=\cancel{x'(t_0)}\Leftrightarrow 2x(t_0)=1\Leftrightarrow x(t_0)=\frac{1}{2}.$$

Όμως $y(t_0)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, οπότε $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

Θέμα Γ

Γ1. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-2,0] και [0,1] ως πολυωνυμική. Είναι $g(-2)=7>0$, g(0)=-1<0 και g(1)=1>0 οπότε g(-2)g(0)<0 και g(0)g(1)<0 οπότε από το θεώρημα Bolzano η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (-2,0) και μια στο (0,1) άρα έχει τουλάχιστον δύο ρίζες πραγματικές.

Γ2. Η g έχει ακριβώς δύο ρίζες ,οι οποίες βρίσκονται στο $(-2,1)$ άρα $g(x)\neq 0$ στο $[1,+\infty)$.

Είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο .

Όμως g(1)>0 άρα $g(x)>0$ για κάθε $x\geq 1$.

2ος τρόπος

Είναι $g(x)=x^4+x^3-1=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)+x^3=\left(\underbrace{x-1}_{\geq 0}\right)\left(\underbrace{x+1}_{>0}\right)\left(\underbrace{x^2+1}_{x>0}\right)+\underbrace{x^3}_{x>0}>0$ για κάθε $x\geq 1$.

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2)x^3+g(0,2021)x+3}{g(0)x^2+331\pi x+3}==\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2)x^3}{g(0)x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2)x}{-1}=-\infty$ (g(2)>0)

2ος τρόπος: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2)x^3+g(0,2021)x+3}{g(0)x^2+331\pi x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(2)x^3}{g(0)x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-23x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(2)+g(2024)+g(2025)}{g^2(0)x^2+x^4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(2)+g(2024)+g(2025)}{1+x^2}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ αφού $g(2)+g(2024)+g(2025)>0$

και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Γ4. Έστω ότι η συνάρτηση $h(x)=4x^5+5x^4-20x+2025$ είχε τέσσερις ή περισσότερες διαφορετικές ρίζες και έστω x_1,x_2,x_3,x_4 τέσσερις από αυτές με $x_1<x_2<x_3<x_4$. Η h είναι συνεχής στα $[x_1,x_2],[x_2,x_3],[x_3,x_4]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στα $(x_1,x_2),(x_2,x_3),(x_3,x_4)$ με $h'(x)=20x^4+20x^3-20$. Είναι $h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=h(x_4)$, οπότε από το Θ Rolle, η $h'(x)=0$ θα έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ρίζες . Όμως $h'(x)=0\Leftrightarrow 20x^4+20x^3-20=0$ $\Leftrightarrow 20(x^4+x^3-1)=0\Leftrightarrow x^4+x^3-1=0\Leftrightarrow g(x)=0$, άρα η g(x)=0 θα έχει τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ρίζες, που είναι άτοπο αφού η g έχει ακριβώς δύο ρίζες.

Γ5. $f(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{(x^4+x^3-1)(x^{2024}+1)}{x^4+x^2+2}=0\Leftrightarrow(x^4+x^3-1)(\underbrace{x^{2024}+1}_{>0})=0\Leftrightarrow(x^4+x^3-1)=0\Leftrightarrow g(x)=0$,

οπότε η f έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις ρίζες της συνάρτησης g. Έστω ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της g με $\rho_1<\rho_2$. Τότε η f είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) και $f(\rho_1)=f(\rho_2)$ οπότε η f' έχει τουλάχιστον μία ρίζα από Θ. Rolle.

Θέμα Δ

Δ1. Από το σχήμα παρατηρούμε ότι $f(0)=0\Leftrightarrow\delta=0$ και $f(1)=0\Leftrightarrow\alpha+\beta+\gamma=0$ (1). Επειδή η C_f εφάπτεται στο άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων είναι $f'(0)=0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+\gamma$ άρα είναι $f'(0)=0\Leftrightarrow\gamma=0$.

Άρα η (1) γίνεται $\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\beta=-\alpha$ και επομένως η f παίρνει την μορφή

$f(x)=\alpha x^3+\beta x^2\Leftrightarrow f(x)=\alpha x^3-\alpha x^2\Leftrightarrow f(x)=\alpha x^2(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Ισχύει $f'(0)=0$ άρα η C_3 απορρίπτεται.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3\alpha x^2-2\alpha x$ άρα είναι παραβολή με $\alpha>0$ οπότε έχει ελάχιστο.
Άρα απορρίπτεται η C_2.
Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=f(1)=0$ άρα από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$ οπότε απορρίπτεται η C_4. Άρα τελικά η γραφική παράσταση της f' είναι C_1.
2ος τρόπος
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3\alpha x^2-2\alpha x$.

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow 3\alpha x^2-2\alpha x=0\Leftrightarrow \alpha x(3x-2)=0\Leftrightarrow (x=0)$ ή $\left(x=\frac{2}{3}\right)$ οπότε έχει δύο ρίζες το 0 και το

$\frac{2}{3}<1$ άρα απορρίπτονται οι C_3,C_4.
Η f' είναι παραβολή με α>0 άρα έχει ελάχιστο οπότε απορρίπτεται η C_2.
Άρα τελικά η γραφική παράσταση της f' είναι C_1.

Δ3. α) $f(x)=\alpha\Leftrightarrow\alpha x^2(x-1)=\alpha\overset{\alpha>0}{\Leftrightarrow}x^2(x-1)=1$

1ος τρόπος: $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x^2(x-1)=1\Leftrightarrow x^3-x^2-1=0$
Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=x^3-x^2-1$, $x\geq1$.
Η h είναι συνεχής ως πολυωνυμική και $h(1)=-1<0$.
Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$ άρα υπάρχει $k>0$ σε περιοχή του $+\infty$ τέτοιο ώστε $h(k)>0$.
Άρα $h(1)h(k)<0$ και από το θεώρημα Bolzano η $h(x)=0$ έχει ρίζα στο $(1,k)\subseteq(1,+\infty)$.
Έστω ότι η $h(x)=0$ έχει δύο (ή περισσότερες) ρίζες ρ_1,ρ_2 με $1<\rho_1<\rho_2$.
Η h είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $h'(x)=3x^2-2x$ και $h(\rho_1)=h(\rho_2)=0$.
Από το θεώρημα Rolle υπάρχει $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3{x_0}^2-2x_0=0\Leftrightarrow x_0(3x_0-2)=0\Leftrightarrow(x_0=0)$ ή $\left(x_0=\frac{2}{3}<1\right)$ πράγμα άτοπο γιατί $1<\rho_1<x_0<\rho_2$.

Άρα η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,+\infty)$.

2ος τρόπος: Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x^2(x-1)$, $x>1$

Για κάθε $1<x_1<x_2$ είναι $\begin{cases} x_1^{\ 2}<x_2^{\ 2} \\ 0<x_1-1<x_2-1 \end{cases}$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη είναι

$x_1^{\ 2}(x_1-1)<x_2^{\ 2}(x_2-1)\Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα $g\nearrow(1,+\infty)$

Η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική και $g\nearrow(1,+\infty)$ άρα $g((1,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to1^+}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(0,+\infty)$

Το $1\in g((1,+\infty))$ και $g\nearrow(1,+\infty)$ άρα η εξίσωση $g(x)=1\Leftrightarrow f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,+\infty)$.

β) $(f(x)-\alpha)\left[(e^x-e^2)(\eta\mu(x-1)+1)-xe^x+xe^2\right]=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(f(x)-\alpha)\left[(e^x-e^2)(\eta\mu(x-1)+1)-x(e^x-e^2)\right]=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(f(x)-\alpha)(e^x-e^2)(\eta\mu(x-1)-x+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(f(x)-\alpha=0)$ ή $(e^x-e^2=0)$ ή $(\eta\mu(x-1)-x+1=0)$ (Α)

- Είναι $e^x-e^2=0\Leftrightarrow e^x=e^2\Leftrightarrow x=2$
- $\eta\mu(x-1)-x+1=0\Leftrightarrow\eta\mu(x-1)=x-1\Leftrightarrow x=1$ γιατί

  Είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$.

  Αν θέσουμε όπου x το $x-1$ είναι $|\eta\mu(x-1)|\le|x-1|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

  Για $x<1$ είναι $|\eta\mu(x-1)|<-(x-1)\Leftrightarrow x-1<\eta\mu(x-1)<-(x-1)$ άρα $\eta\mu(x-1)>x-1$.

  Για $x>1$ είναι $|\eta\mu(x-1)|<x-1\Leftrightarrow-(x-1)<\eta\mu(x-1)<x-1$ άρα $\eta\mu(x-1)<x-1$.

Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση (Α) έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο $[1,2]$. Ήδη έχουμε δείξει ότι έχει ρίζες το 1 και το 2. Επειδή από το Δ3) α) η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,+\infty)$ αρκεί να δείξουμε ότι έχει ρίζα στο $(1,2)$.

1ος τρόπος: Από το προηγούμενο ερώτημα $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x^2(x-1)=1\Leftrightarrow g(x)=1$

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$, $g(1)=0$ και $g(2)=4$ άρα $g(1)<1<g(2)$.

Άρα από το ΘΕΤ η εξίσωση $g(x)=1\Leftrightarrow f(x)=\alpha$ έχει ρίζα στο $(1,2)$ η οποία σύμφωνα με το Δ3) α) είναι και μοναδική.

2ος τρόπος: Από το προηγούμενο ερώτημα $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x^2(x-1)=1\Leftrightarrow g(x)=1$

Η g είναι συνεχής ως πολυωνυμική και $g\nearrow(1,2)\subseteq(1,+\infty)$ (το δείξαμε στον 2ο τρόπο του Δ3)α)) άρα

$g((1,2))=\left(\lim\limits_{x\to1^+}g(x),\lim\limits_{x\to2^-}g(x)\right)=(0,4)$.

Το $1\in g((1,2))$ και $g\nearrow(1,2)$ άρα η εξίσωση $g(x)=1\Leftrightarrow f(x)=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$.

3ος τρόπος: Από το προηγούμενο ερώτημα $f(x)=\alpha\Leftrightarrow x^3-x^2-1=0\Leftrightarrow h(x)=0$

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική.

Είναι $h(1)=-1<0$, $h(2)=3>0$ άρα $h(1)h(2)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow f(x)=\alpha$ έχει ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ η οποία σύμφωνα με το Δ3) α) είναι και μοναδική.

Δ4. $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|f(x)|}{|x|-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\alpha x^2(x-1)|}{|x|-x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|\alpha x^2||x-1|}{|x|-x}$

Είναι $\alpha > 0$ άρα $\alpha x^2 > 0$ για κάθε x κοντά στο μηδέν και $\lim\limits_{x\to 0}(x-1) = -1 < 0$ άρα $x-1<0$ για κάθε x κοντά στο μηδέν.

Επομένως είναι $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x^2(1-x)}{|x|-x}$.

Για x κοντά στο μηδέν από μεγαλύτερες τιμές θα είναι $|x| - x = x - x = 0$ και το όριο δεν έχει νόημα.

Άρα το όριο είναι καλώς ορισμένο μόνο για x κοντά στο μηδέν από μικρότερες τιμές.

Άρα $L = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha x^2(1-x)}{|x|-x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^2(1-x)}{|x|-x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\alpha x^{\cancel{2}}(1-x)}{-2\cancel{x}} = 0$.