32η Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}, & x\neq 0 \\ 1/6 , & x=0 \end{cases}$.Να δείξετε ότι:

α) η f είναι συνεχής.

β) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο που τέμνει τον y΄y.

δ) η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$.

ε) $\dfrac{1}{\pi}<\int_0^\pi f(x)dx<\dfrac{\pi}{6}$.

στ) $f(x)>\ln x-x$ για κάθε $x>0$.

ζ) η f έχει μόνο οριζόντια ασύμπτωτη.

η) η f έχει μέγιστο.

θ) η f είναι άρτια.

ι) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=2\int_0^\pi f(x)dx$

Στέλιος Μιχαήλογλου

Λύση

α) Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Στο $x_0=0$ είναι:

$\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{3x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{6x}=\frac{1}{6}=f(0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ και επομένως είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $|\eta\mu x|\le|x|$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$, άρα

για $x>0$ είναι $|\eta\mu x|<x\Leftrightarrow -x<\eta\mu x<x\Rightarrow x-\eta\mu x>0$ άρα $f(x)=\frac{x-\eta\mu x}{x^3}>0$,

ενώ για $x<0$ είναι $|\eta\mu x|<-x\Leftrightarrow x<\eta\mu x<-x\Rightarrow x-\eta\mu x<0$ και $f(x)=\frac{x-\eta\mu x}{x^3}>0$.

Επειδή $f(0)=\frac{1}{6}>0$, είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x-\eta\mu x}{x^3}-\frac{1}{6}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{6x-6\eta\mu x-x^3}{6x^3}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6x-6\eta\mu x-x^3}{6x^4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(6x-6\eta\mu x-x^3\right)'}{\left(6x^4\right)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{6-6\sigma\upsilon\nu x-3x^2}{24x^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(6-6\sigma\upsilon\nu x-3x^2\right)'}{\left(24x^3\right)'}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{6\eta\mu x-6x}{72x^2}=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{12x}\left(\frac{\eta\mu x}{x}-1\right)\right]=\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\eta\mu x}{x}-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{\eta\mu x}{x}-1\right)'}{(x)'}=$

$\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}}{1}=\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DLH}{=}}\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\right)'}{\left(x^2\right)'}=$

$\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to0}\frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-x\eta\mu x-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}}{2x}=\frac{1}{12}\lim\limits_{x\to0}\frac{-\eta\mu x}{2}=0$, άρα $f'(0)=0$ και η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο που τέμνει τον y΄y.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=\frac{(1-\sigma\upsilon\nu x)x^3-(x-\eta\mu x)3x^2}{x^6}\Leftrightarrow$

$f'(x)=\frac{\cancel{x^2}\left(x-x\sigma\upsilon\nu x-3x+3\eta\mu x\right)}{x^{\cancel{6}^4}}=\frac{3\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x-2x}{x^4}$.

Έστω $\varphi(x)=3\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x-2x,\ x\in[0,\pi]$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $\varphi'(x)=3\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x-2=2\sigma\upsilon\nu x-2+x\eta\mu x$, $\varphi''(x)=-2\eta\mu x+\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$ και $\varphi^{(3)}(x)=\cancel{\sigma\upsilon\nu x}-x\eta\mu x-\cancel{\sigma\upsilon\nu x}=-x\eta\mu x<0$ και επειδή η φ'' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για κάθε $0<x<\pi\overset{\varphi''\searrow}{\Rightarrow}\varphi''(x)<\varphi''(0)=0$ και επειδή η φ' είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για κάθε $0<x<\pi\overset{\varphi'\searrow}{\Rightarrow}\varphi'(x)<\varphi'(0)=0$ και επειδή η φ είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$. Για κάθε $0<x<\pi\overset{\varphi\searrow}{\Rightarrow}\varphi(x)<\varphi(0)=0$ οπότε $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα 0 και π, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$.

ε) Για κάθε $0\le x\le \pi \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(0)\ge f(x)\ge f(\pi) \Leftrightarrow \frac{1}{\pi^2}\le f(x)\le \frac{1}{6}$ και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για κάθε $x\in[0,\pi]$, είναι $\int_0^\pi \frac{1}{\pi^2}dx<\int_0^\pi f(x)dx<\int_0^\pi \frac{1}{6}dx \Leftrightarrow \ \frac{1}{\pi}<\int_0^\pi f(x)dx<\frac{\pi}{6}$

στ) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$ είναι $\ln x\le x-1$, οπότε $\ln x-x\le -1$. Όμως για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$, άρα $f(x)>\ln x-x$ για κάθε $x>0$.

ζ) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-\eta\mu x}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\eta\mu x}{x^3}\right)=0$ γιατί για $x<0$ είναι

$\left|\frac{\eta\mu x}{x^3}\right|=\frac{|\eta\mu x|}{-x^3}\le-\frac{1}{x^3}\Leftrightarrow \frac{1}{x^3}\le\frac{\eta\mu x}{x^3}\le-\frac{1}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=0=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\eta\mu x}{x^3}=0$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, οπότε η $y=0$ δηλαδή ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και στα δύο άπειρα. Επειδή η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη, δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

η) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, υπάρχει κάποιος πολύ μικρός αρνητικός αριθμός α για τον οποίο ισχύει ότι $0<f(x)<f(\alpha)$ (1) για κάθε $x<\alpha$.

Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, υπάρχει κάποιος πολύ μεγάλος θετικός αριθμός β για τον οποίο ισχύει ότι $0<f(x)<f(\beta)$ (2) για κάθε $x>\beta$.

Στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ η f είναι συνεχής, οπότε λόγω του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής, θα παρουσιάζει μέγιστο Μ στο διάστημα αυτό. Δηλαδή θα υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x)\le f(x_0)=M$ (3) για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Από τις σχέσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $f(x)\le M$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f έχει μέγιστο το Μ για $x=x_0$.

θ) Για κάθε $x\ne0$ είναι $f(-x)=\frac{-x-\eta\mu(-x)}{(-x)^3}=\frac{-x+\eta\mu x}{-x^3}=-\frac{-x+\eta\mu x}{x^3}=\frac{x-\eta\mu x}{x^3}=f(x)$.

Επειδή $f(0)=\frac{1}{6}$, είναι $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η f είναι άρτια.

η) Είναι $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{0} f(x)dx+\int_0^\pi f(x)dx=\int_{-\pi}^0 f(-x)dx+\int_0^\pi f(x)dx$.

Θέτουμε $-x=u\Leftrightarrow x=-u$ και $dx=-du$. Για $x=0$ είναι $u=0$ και για $x=-\pi$ είναι $u=\pi$. Τότε $\int_{-\pi}^0 f(-x)dx=-\int_\pi^0 f(u)du=\int_0^\pi f(x)dx$ και $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_0^\pi f(x)dx+\int_0^\pi f(x)dx=2\int_0^\pi f(x)dx$