Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

10ο Διαγώνισμα

3-5-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ, τότε: $f(x)=g(x) \Leftrightarrow f'(x)=g'(x)$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f'(x)=(x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

i. το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

ii. το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

δ) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 ,τότε η f΄ είναι συνεχής στο x_0 .

μονάδες 4+2+2+2

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x^2-2}{|x|+x}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x-\dfrac{1}{x},\ x>0$.

μονάδες 4

Β2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

μονάδες 3

Β3. Έστω $\varphi(x)=(f\circ g)(x)=e^x-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $g(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι η φ είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 5

γ) Να βρείτε την φ^{-1}.

μονάδες 5

δ) Να αποδείξετε ότι $e^x-e^{-x}>x-\dfrac{1}{x}$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Ευθεία (ε) στρέφεται γύρω από το σημείο της Α(8,4) με ρυθμό $\lambda'(t)=\dfrac{9}{160}\min^{-1}$ όπου $\lambda\in(0,+\infty)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσής της (ε) . Εάν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες x΄x , y΄y, στα σημεία Κ , Λ αντίστοιχα, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ είναι $E(\lambda)=8\left(\frac{1}{\lambda}-4+4\lambda\right)$.

μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΚΛ ως προς το χρόνο τη χρονική στιγμή που η ευθεία περνάει από το σημείο Β(4,1).

μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η $E'(x)=8\left(-\frac{1}{x^2}+4\right)$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η $g(x)=(E')^{-1}(x)$.

μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε τη μονοτονία της g και της συνάρτησης $f(x)=e^{-1821x}-x^{1821}+2021$ και να αποδείξετε ότι αυτές έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

μονάδες 6

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα .

μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $e^{-x}\cdot\left(\eta\mu x+x^2+x+2\right)=2$.

μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x)=\sqrt{\eta\mu x-2e^x+x^2+x+1-\ln\left(\eta\mu x-2e^x+x^2+x+2\right)}.$$

μονάδες 4

Δ4. Αν η f είναι κυρτή αύξουσα στο $(-\infty,0]$ και κοίλη $[0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτομένες παράλληλες στην ευθεία $(\delta): y=\left(\pi-e^{\pi}\right)\cdot x-2021$

μονάδες 7

Καλή Τύχη!

Θέμα Α

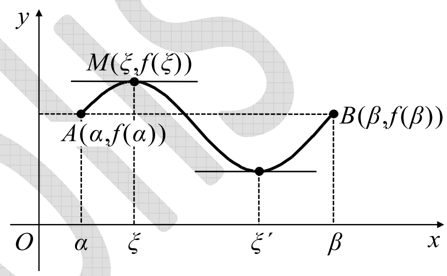
Α1. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$.

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.
Ομοίως αν $x_1 > x_2$

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$,

παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.
Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.



Α3. α) Ψευδής

β) Είναι φανερό ότι αν $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε προφανώς και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
Αν όμως $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta$ τότε $f(x) = g(x) + c,\ c \in \mathbb{R}$, $x \in \Delta$.
Αντιπαράδειγμα για $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^3 + 4$ με $f'(x) = g'(x) = 3x^2$

Α4. α) i. Λ ii. Σ β) Σ γ) Λ δ) Σ

Θέμα Β

Β1. Η f ορίζεται όταν $|x| + x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x > 0$. Τότε

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2}{|x| + x} = \frac{2x^2 - 2}{x + x} = \frac{2x^2 - 2}{2x} = \frac{\cancel{2}x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{x}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x} = x - \frac{1}{x}.$$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow (0, +\infty)$

Β3. α) Είναι $f(g(x)) = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow f(g(x)) = e^x - \dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow f(g(x)) = f(e^x) \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = e^x + e^{-x} > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \mathbb{R} \Rightarrow \varphi\ 1-1$, οπότε η φ είναι αντιστρέψιμη.
Είναι $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^x - e^{-x}\right) = 0 - (+\infty) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x - e^{-x}\right) = +\infty - 0 = +\infty$.
Επειδή η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ έχει σύνολο τιμών το $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

γ) Επειδή το πεδίο ορισμού της φ^{-1} είναι το σύνολο τιμών της φ, είναι $A_{\varphi^{-1}} = \mathbb{R}$.

$\varphi(x)=y \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}=y \Leftrightarrow e^{x}-\frac{1}{e^{x}}=y \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-1=ye^{x} \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-ye^{x}-1=0$ (1).

Θέτουμε $e^{x}=\omega>0$ και η (1) γίνεται $\omega^{2}-y\omega-1=0$. Η εξίσωση αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς ω με

$\Delta=y^{2}+4>0$ και ρίζες $\omega_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^{2}+4}}{2}$.

Είναι $\omega>0 \Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2}>0 \Leftrightarrow y+\sqrt{y^{2}+4}>0 \Leftrightarrow \sqrt{y^{2}+4}>-y$ (2)

Αν $y\geq 0$ τότε η (2) είναι αληθής.

Αν $y<0$ τότε η (2) γίνεται $\left(\sqrt{y^{2}+4}\right)^{2}>(-y)^{2} \Leftrightarrow y^{2}+4>y^{2}$ ισχύει.

Είναι $\omega>0 \Leftrightarrow \frac{y-\sqrt{y^{2}+4}}{2}>0 \Leftrightarrow y-\sqrt{y^{2}+4}>0 \Leftrightarrow \sqrt{y^{2}+4}<y$ (3)

Αν $y\leq 0$ τότε η (2) είναι αδύνατη.

Αν $y>0$ τότε η (3) γίνεται $\left(\sqrt{y^{2}+4}\right)^{2}<y^{2} \Leftrightarrow y^{2}+4<y^{2}$ αδύνατη.

Άρα $\omega=\frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2} \Leftrightarrow e^{x}=\frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2} \Leftrightarrow x=\ln\frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2}$.

Οπότε $\varphi^{-1}(y)=\ln\frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2}$, $y\in\mathbb{R}$, άρα $\varphi^{-1}(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^{2}+4}}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

ή

Επειδή το πεδίο ορισμού της φ^{-1} είναι το σύνολο τιμών της φ, είναι $A_{\varphi^{-1}}=\mathbb{R}$.

$\varphi(x)=y \Leftrightarrow e^{x}-e^{-x}=y \Leftrightarrow e^{x}-\frac{1}{e^{x}}=y \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-1=ye^{x} \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-ye^{x}-1=0$ (1).

Θέτουμε $e^{x}=\omega>0$ και η (1) γίνεται $\omega^{2}-y\omega-1=0$. Η εξίσωση αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού ως προς ω με

$\Delta=y^{2}+4>0$ και ρίζες $\omega_{1,2}=\frac{y\pm\sqrt{y^{2}+4}}{2}$.

Έχουμε :

$\frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2}>\frac{y+\sqrt{y^{2}}}{2} \Leftrightarrow \frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2}>\frac{y+|y|}{2}$ οπότε $\frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2}>0$.

$\frac{\sqrt{y^{2}+4}-y}{2}>\frac{\sqrt{y^{2}}-y}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{y^{2}+4}-y}{2}>\frac{|y|-y}{2}$.

Όμως $|y|\geq y \Leftrightarrow |y|-y\geq 0 \Leftrightarrow \frac{|y|-y}{2}\geq 0$, $|y|\geq -y \Leftrightarrow |y|+y\geq 0 \Leftrightarrow \frac{|y|+y}{2}\geq 0$ οπότε :

$\frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2}>0$, $\frac{\sqrt{y^{2}+4}-y}{2}>0 \Leftrightarrow \frac{y-\sqrt{y^{2}+4}-y}{2}<0$.

Άρα η δεκτή λύση είναι η $\omega=\frac{y+\sqrt{y^{2}+4}}{2}$.

δ) $e^{x}-e^{-x}>x-\frac{1}{x} \Leftrightarrow f\left(g(x)\right)>f(x) \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)>x \Leftrightarrow e^{x}>x$ που ισχύει γιατί για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $e^{x}\geq x+1>x$.

Θέμα Γ

Γ1. Είναι ε: $y-4=\lambda(x-8)\Leftrightarrow y=\lambda x+4-8\lambda$. Τέμνει τον x΄x στο σημείο $K\left(\dfrac{8\lambda-4}{\lambda},0\right)$ και τον y΄y στο σημείο $\Lambda(0,-8\lambda+4)$ οπότε το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E=\frac{1}{2}\left|\frac{8\lambda-4}{\lambda}\right|\left|4-8\lambda\right|=\frac{1}{2}\frac{(4-8\lambda)^2}{\lambda}=8\frac{(1-2\lambda)^2}{\lambda}=8\left(\frac{1}{\lambda}-4+4\lambda\right)$$

Γ2. Άρα $E(\lambda)=8\left(\dfrac{1}{\lambda}-4+4\lambda\right)$.

Είναι $E(t)=8\left(\dfrac{1}{\lambda(t)}-4+4\lambda(t)\right)$, $t\geq 0$, όπου t ο χρόνος σε λεπτά(min).

Είναι $E'(t)=8\left(-\dfrac{1}{\lambda^2(t)}+4\right)\lambda'(t)$ οπότε $E'(t)=8\left(-\dfrac{1}{\lambda^2(t)}+4\right)\cdot\dfrac{9}{160}$

Όταν $t=t_0$ είναι $\lambda(t_0)=\dfrac{1-4}{4-8}=\dfrac{3}{4}$ και άρα $E'(t_0)=8\left(-\dfrac{16}{9}+4\right)\cdot\dfrac{9}{160}\Leftrightarrow$

$E'(t_0)=8\dfrac{20}{9}\cdot\dfrac{9}{160}=1$ μ.μ^2 / min

Γ3. $E'(x)=8\left(-\dfrac{1}{x^2}+4\right)$ με x> 0.Είναι $E''(x)=\dfrac{16}{x^3}>0$ οπότε η Ε΄ είναι γνησίως αύξουσα και άρα αντιστρέφεται. Επειδή η Ε΄ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ θα είναι

Ε΄(Α)=$(\lim\limits_{x\to 0^+}E'(x),\lim\limits_{x\to+\infty}E'(x))=(-\infty,32)$.

Θέτω y=E΄(x) με x > 0 και ψ < 32, οπότε $y=8\left(-\dfrac{1}{x^2}+4\right)\Leftrightarrow\dfrac{y}{8}-4=-\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow\dfrac{32-y}{8}=\dfrac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{8}{32-y}$

$\overset{x>0}{\Leftrightarrow}x=\sqrt{\dfrac{8}{32-y}}$ και άρα $(E')^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{8}{32-x}}$ με x < 32.

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-f(x)=\sqrt{\dfrac{8}{32-x}}-e^{-1821x}+x^{1821}-2021$ με x <32.

Η h είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{8}{32-x}}}\left(\dfrac{8}{32-x}\right)'-1821e^{-1821x}+1821x^{1820}\Leftrightarrow$

$h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{8}{32-x}}}\dfrac{8}{(32-x)^2}+1821e^{-1821x}+1821x^{1820}>0$ οπότε η hείναι γνησίως αύξουσα.

Είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της οπότε έχει σύνολο τιμών το

h(A)=$\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),\lim\limits_{x\to 32^-}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Επειδή το 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών της h και η h είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $h(x)=0\Leftrightarrow g(x)=f(x)$ έχει μόνο μία ρίζα.

Θέμα Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με παράγωγο $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-2e^x+2x+1$,

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\geq x+1\Leftrightarrow 2e^x\geq 2x+2\Leftrightarrow -1\geq 2x+1-2e^x$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x = 0. Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $-1\leq\sigma\upsilon\nu x\leq 1$ με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει

$συνx - 2e^x + 2x + 1 \le 0 \Leftrightarrow f'(x) \le 0$ με το ίσον να ισχύει μόνο για x= 0 οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Έχουμε $e^{-x}\left(ημx + x^2 + x + 2\right) = 2 \Leftrightarrow ημx + x^2 + x + 2 = 2e^x \Leftrightarrow$

$ημx - 2e^x + x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$.

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της οπότε έχει σύνολο τιμών το

$f(\mathbb{R}) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$ αφού

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(ημx - 2e^x + x^2 + x + 2\right) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^2 \cdot \left(\frac{ημx}{x^2} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) - 2e^x\right] =$$

$+\infty \cdot \left[(0+1+0+0) - 0\right] = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(ημx - 2e^x + x^2 + x + 2\right) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2 \cdot \left(\frac{ημx}{x^2} - \frac{2e^x}{x^2} + 1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right] = -\infty.$$

$\left(\left|\frac{ημx}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{ημx}{x^2} \le \frac{1}{x^2}\right.$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2} = 0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ οπότε από Κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ημx}{x^2} = 0$).

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$).

Το $0 \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$.

Το x_0 μοναδικό αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Δ3. Πρέπει και αρκεί: $ημx - 2e^x + x^2 + x + 2 > 0 \; (1)$ και

$ημx - 2e^x + x^2 + x + 1 - \ln\left(ημx - 2e^x + x^2 + x + 2\right) \ge 0 \; (2)$

$(1) \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0 \; (3)$ και για την (2) αν θέσουμε

$ημx - 2e^x + x^2 + x + 2 = y > 0$ για $x < 0$ τότε $-2e^x + x^2 + x + 2 = y - 1, (2) \Leftrightarrow$

$y - 1 \ge \ln y$, αληθής για κάθε $y > 0$, κάτα συνέπεια αληθής για κάθε $x < 0 \; (4)$

Από $(3),(4) \Rightarrow A_g = (-\infty, 0)$.

Δ4. Έστω (ε) εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία (δ).

Αν $A(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της με την C_f τότε $f'(x_0) = \pi - e^\pi$.

Έστω $A_1 = (-\infty, 0)$ και $A_2 = [0, +\infty)$.

Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$ οπότε :

$f'(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\right) = (-\infty, 0)$, $f'(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] = (-\infty, 0]$.

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \ge x + 1 > x$, οπότε $e^\pi > \pi \Leftrightarrow \pi - e^\pi < 0$.

Το $\pi - e^\pi < 0$ ανήκει στα $f(A_1), f(A_2)$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$ τέτοια ώστε

$f'(x_1) = \pi - e^\pi$, $f'(x_2) = \pi - e^\pi$

Τα x_1, x_2 μοναδικά ,λόγω της μονοτονίας στα διαστήματα A_1, A_2,άρα η εξίσωση $f'(x) = \pi - e^\pi$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

Άρα υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτομένες παράλληλες στην ευθεία $(\delta): y = \left(\pi - e^\pi\right) \cdot x - 2021$.

($\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sigma\upsilon\nu x - 2e^x + 2x + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} + 2 + \frac{1}{x}\right) - 2e^x\right] = -\infty\cdot\left[\left(0+2+0\right)-0\right] = -\infty$

και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sigma\upsilon\nu x - 2e^x + 2x + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\cdot\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} - 2\frac{e^x}{x} + 2 + \frac{1}{x}\right)\right] = +\infty\cdot\left(0-\infty+2+0\right) = -\infty$.

$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \le \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} \le \frac{1}{|x|}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{|x|} = 0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{1}{|x|}\right)$ οπότε από Κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x} \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty$).