

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω \vec{a}, \vec{v} δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Δείξτε ότι για την προβολή του \vec{v} πάνω στο \vec{a} ισχύει $\vec{a}\vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$.

(15 μονάδες)

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ δίνεται από το τύπο $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})$.

Σ - Λ

β) Για τη γωνία φ , που σχηματίζει ένα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα $x'x$ ισχύει $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Σ - Λ

γ) Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \cdot B \neq 0$ και $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$.

Σ - Λ

δ) Η απόσταση της κορυφής μιας παραβολής από την εστία της είναι ίση με το μισό της απόστασης της εστίας από την διευθετούσα.

Σ - Λ

ε) Ισχύει η ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} = \lambda \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$

Σ - Λ

(2x5 μονάδες)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = -3\vec{j}$.

B1. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{\nu} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} = (-3, 12)$ και βρείτε τον αριθμό $\gamma = \vec{\nu}\vec{\alpha} + 4\vec{\alpha}\vec{\beta}$.
(6 μονάδες)

B2. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η πλευρά AB διέρχεται από το σημείο $K(3, 3)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\nu}$, ενώ η πλευρά $B\Gamma$ έχει εξίσωση $y = (\vec{\nu}\vec{\alpha} + 4\vec{\alpha}\vec{\beta})x - 2$ τότε βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών AB και $B\Gamma$ και την κορυφή B .
(7 μονάδες)

B3. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας γραμμής, στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(\lambda - 1, 2\lambda + 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(6 μονάδες)

B4. Αν η πλευρά $A\Gamma$ είναι η ευθεία γραμμή που βρήκατε στο ερώτημα B3 τότε να δείξετε ότι το μήκος του ύψους BL είναι $\frac{49\sqrt{5}}{55}$.
(6 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(2, -3)$ και τη πλευρά $\Gamma\Delta$ να έχει εξίσωση $2x - 3y + 5 = 0$. Μία πλευρά του βρίσκεται στην ευθεία

$$(\epsilon): x + y = 0.$$

Γ1. Δείξτε ότι η πλευρά που βρίσκεται στην ευθεία (ϵ) είναι η $B\Gamma$, βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ και δείξτε ότι το κέντρο του παραλληλογράμμου είναι $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$.
(7 μονάδες)

Γ2. Βρείτε την πλευρά AB και δείξτε ότι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι $\frac{18}{5}$ τ.μ.
(7 μονάδες)

Γ3. Δείξτε ότι η εξίσωση της παραβολής C , που έχει κορυφή $O(0, 0)$, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το κέντρο K του παραλληλογράμμου είναι $x = \frac{1}{2}y^2$
(5 μονάδες)

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

- Γ4.** Δείξτε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C στο σημείο K είναι $2x + 2y + 1 = 0$ και μετά βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{EK\Theta}$, όπου E η εστία και $\overline{K\Theta} \nearrow \nearrow \overline{OE}$.
- (6 μονάδες)*

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : ax + by = 0$.

- Δ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4ax - 4by = 0$ παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ .
- (7 μονάδες)*
- Δ2.** Ποια είναι η σχετική θέση της ευθείας και του κύκλου.
- (5 μονάδες)*
- Δ3.** Αν για τους αριθμούς a και b ισχύει $3a^2 + 4b^2 = 3$ τότε να δείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται στην έλλειψη $3x^2 + 4y^2 = 12$, της οποίας να βρείτε τα μήκη των αξόνων και την εκκεντρότητα.
- (6 μονάδες)*
- Δ4.** Δείξτε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης σε σημείο $N(x_1, y_1)$ διαφορετικό των κορυφών της, που διέρχεται από το $Z(-2, 3)$ είναι $x + 2y - 4 = 0$. Μετά δείξτε ότι τα σημεία Z , $O(0, 0)$ και το μέσο του NA' είναι συνευθειακά, όπου A' η κορυφή της έλλειψης στον άξονα Ox' .
- (7 μονάδες)*

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Κυριακή 17 Απριλίου 2016
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Σχολικό βιβλίο σελ. 45.
A2. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{\beta} = 3(-1, 2) - 2(0, -3) = (-3, 6) + (0, 6) = (-3, 12)$.
 $\gamma = (-3, 12)(-1, 2) + 4(-1, 2)(0, -3) = (3 + 24) + 4(0 - 6) = 27 - 24 = 3$.

B2. $AB \perp \vec{v} \Leftrightarrow \lambda_{AB} \cdot \lambda_{\vec{v}} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = \frac{-1}{\lambda_{\vec{v}}} = \frac{-1}{\frac{12}{-3}} = \frac{1}{4}$

Άρα $AB: y - 3 = \frac{1}{4}(x - 3) \Leftrightarrow 4y - 12 = x - 3 \Leftrightarrow x - 4y + 9 = 0$

και $B\Gamma: y = 3x - 2$ αφού $\gamma = \vec{v}\vec{a} + 4\vec{a}\vec{\beta} = 3$

Για την εύρεση της κορυφής Β λύνω το σύστημα:

$$\begin{cases} x - 4y = -9 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 12x + 8 = -9 \\ y = 3x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow (-11x = -17) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{11} \\ y = \frac{29}{11} \end{cases}$$

B3.
$$\begin{pmatrix} x_M = \lambda - 1 \\ y_M = 2\lambda + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda = x_M + 1 \\ y_M = 2x_M + 2 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda = x_M + 1 \\ 2x_M - y_M + 4 = 0 \end{pmatrix}$$

Άρα το Μ κινείται στην ευθεία $2x - y + 4 = 0$

B4. Είναι $ΑΓ : 2x - y + 4 = 0$.

$$(B\Lambda) = d(B, ΑΓ) = \frac{\left| 2 \cdot \frac{17}{11} - \frac{29}{11} + 4 \right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{49}{11}}{\sqrt{5}} = \frac{49\sqrt{5}}{11 \cdot 5} = \frac{49\sqrt{5}}{55}.$$

ΘΕΜΑ Γ

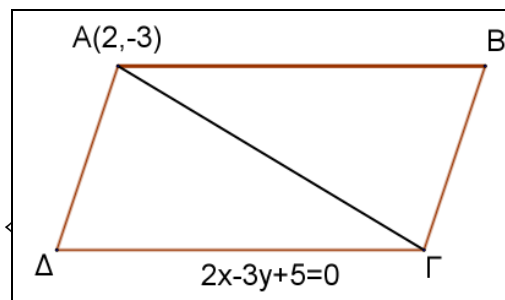
Γ1. Η $(\varepsilon) : x + y = 0$ δεν διέρχεται από το $A(2, -3)$ αφού οι συντεταγμένες του δεν την επαληθεύουν και δεν είναι παράλληλη στην $\Delta\Gamma$ γιατί $\lambda_\varepsilon = -1 \neq \lambda_{\Delta\Gamma}$. Άρα είναι η $(B\Gamma)$.

Για το Γ λύνουμε το

$$(\Sigma_1) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x + 3x + 5 = 0 \end{cases}$$

δηλαδή $\Gamma(-1, 1)$, άρα

$$K\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{1-3}{2}\right) \text{ ή } K\left(\frac{1}{2}, -1\right).$$



Γ2. Για την AB : $(\Delta\Gamma) // (AB) \Leftrightarrow \lambda_{\Gamma\Delta} = \lambda_{AB} = \frac{2}{3}$ και διέρχεται από το $A(2, -3)$
άρα $y - (-3) = \frac{2}{3}(x - 2) \Leftrightarrow 2x - 3y - 13 = 0$.

Για το σημείο B :

$$(\Sigma_2) \begin{cases} 2x - 3y - 13 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x = 13 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5} \\ y = -\frac{13}{5} \end{cases} \text{ Άρα } B\left(\frac{13}{5}, -\frac{13}{5}\right)$$

δηλ. $\overline{A\Gamma} = (-3, 4)$ και $\overline{AB} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$

δηλ. $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 2 \\ \frac{13}{5} & -\frac{13}{5} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| -\frac{6}{5} - \frac{12}{5} \right| = \frac{9}{5} \text{ τ.μ.}$

άρα $(AB\Gamma\Delta) = 2(AB\Gamma) = \frac{18}{5} \text{ τ.μ.}$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

Γ3. Η παραβολή είναι της μορφής

$C: y^2 = 2px$ και διέρχεται από το σημείο $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ άρα:

$$1 = 2p \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow p = 1 \quad \text{δηλαδή} \quad C: y^2 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y^2.$$

Γ4. Η εφαπτόμενη στο σημείο $K\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ θα είναι:

$$(\eta): -y = 1 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 2x + 2y + 1 = 0 \quad \text{με } \lambda_\epsilon = -1$$

Η διχοτόμος της γωνίας $EK\Theta$ είναι κάθετη στην παραπάνω εφαπτόμενη
 $\delta \perp \eta \Leftrightarrow \lambda_\delta \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\delta = 1$ (από την ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση $(\epsilon): ax + by = 0$ παριστάνει ευθεία, άρα $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4ax - 4by = 0$ **(1)** είναι της μορφής $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$
με: $A^2 + B^2 - 4\Gamma = 16a^2 + 16b^2 = 16(a^2 + b^2) > 0$ αφού $a \neq 0$ ή $b \neq 0$.

Άρα παριστάνει κύκλο με κέντρο $K(2a, 2b)$ και ακτίνα

$$\rho = \frac{\sqrt{16(a^2 + b^2)}}{2} = 2\sqrt{a^2 + b^2}$$

Δ2. $d(K, \epsilon) = \frac{|2a^2 + 2b^2|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2\sqrt{a^2 + b^2} = \rho$ δηλαδή η ευθεία είναι εφαπτόμενη του κύκλου.

Δ3. Αν $K(x_K, y_K)$ τότε: $\left\{ \begin{matrix} x_K = 2a \\ y_K = 2b \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} a = \frac{x_K}{2} \\ b = \frac{y_K}{2} \end{matrix} \right\}$.

$$\text{Όμως } 3a^2 + 4b^2 = 3 \Leftrightarrow 3 \frac{x_K^2}{4} + 4 \frac{y_K^2}{4} = 3 \Leftrightarrow$$

$$3x_K^2 + 4y_K^2 = 12 \quad \text{ή} \quad \frac{x_K^2}{4} + \frac{y_K^2}{3} = 1$$

δηλαδή κινείται το K σε έλλειψη με $a^2 = 4$ και $b^2 = 3$.

Άρα $a = 2$ και $b = \sqrt{3}$ οπότε θα είναι:

Μεγάλος άξονας: $(AA') = 2a = 4$, μικρός άξονας: $(BB') = 2\sqrt{3}$ και

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2016
Β ΦΑΣΗ

$$\gamma^2 = 4 - 3 = 1 \text{ δηλαδή εκκεντρότητα } \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Δ4. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $N(x_1, y_1)$ είναι: $3x_1 \cdot x + 4y_1 \cdot y = 12$, η οποία διέρχεται από το $Z(-2, 3)$ άρα:

$$-6x_1 + 12y_1 = 12 \Leftrightarrow x_1 - 2y_1 = -2 \quad (1) \text{ και το } N(x_1, y_1) \text{ είναι σημείο της έλλειψης,} \\ \text{οπότε: } 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \quad (2)$$

Για την εύρεση της $N(x_1, y_1)$ λύνω το σύστημα των (1) και (2):

$$(\Sigma) \left. \begin{array}{l} x_1 - 2y_1 = -2 \\ 3x_1^2 + 4y_1^2 = 12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2y_1 - 2 \\ 3 \cdot (2y_1 - 2)^2 + 4y_1^2 = 12 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{12} (y_1^2 - 2y_1 + 1) + 4y_1^2 = \cancel{12} \Leftrightarrow 3y_1^2 - 6y_1 + 3 + y_1^2 - 3 = 0$$

$$4y_1^2 - 6y_1 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 0 \text{ ή } y_1 = \frac{3}{2} \text{ δηλαδή } N\left(1, \frac{3}{2}\right). \text{ Άρα η εξίσωση της} \\ \text{εφαπτόμενης}$$

$$\text{είναι } 3 \cdot 1 \cdot x + 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot y = 12 \Leftrightarrow 3x + 6y = 12 \Leftrightarrow x + 2y = 4 \Leftrightarrow x + 2y - 4 = 0$$

$$\text{Είναι } A'(-2, 0), N\left(1, \frac{3}{2}\right) \text{ οπότε το μέσο } M \text{ του } NA' \text{ είναι } M\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

Έχω και $Z(-2, 3), O(0, 0)$

$$\text{Άρα } \overline{OM} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \text{ και } \overline{OZ} = (-2, 3).$$

$$\text{Οπότε } \det(\overline{OM}, \overline{OZ}) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} + \frac{6}{4} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

Δηλαδή $\overline{OM} \parallel \overline{OZ}$ οπότε O, M, Z συνευθειακά.