

**Επαναληπτικά Διαγωνίσματα
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
της Γ΄ Λυκείου
από το Askisopolis
2024 - 2025**



**Αντώνης Βαλέργας
Στέλιος Μιχαήλογλου
Θανάσης Νικολόπουλος
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Βαγγέλης Τόλης
Ισαάκ Χιονίδης**

**Αποστόλης Κακαβάς
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Νίκος Σαμπάνης
Νίκος Τούντας**



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ' Λυκείου
3ο Διαγώνισμα
Ύλη: Όρια συναρτήσεων

26-10-2024

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πολυώνυμο $P(x)$, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

7 μονάδες

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: « $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm 1$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

A3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

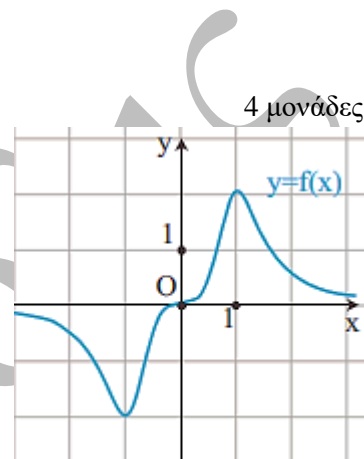
Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένα τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = \dots$

δ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)} = \dots$



4 μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και

$$f(x) < g(x) \text{ για κάθε } x \text{ κοντά στο } x_0, \text{ ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

β) Ισχύει $|ημx| < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$.

ε) Αν είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο $-\infty$.

4 μονάδες

10 μονάδες

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

B1. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x) - \sqrt{x} - 1| - |f(x) - x - 1|}{\sqrt{x}}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left| (f(x) - \sqrt{x})^2 - 1 \right|}{x - 1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\etaμ(f(x) - \sqrt{x})}{\sqrt{x}}$

9 μονάδες

B2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1}{f(x)}$

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{f(x) - x\sqrt{x} - 1}$

6 μονάδες

B3. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x - \sqrt{x+1})$$

6 μονάδες

$$\text{B4. Av } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^2 - \sqrt{x} + \lambda}{x-1} = 3, \text{ να βρείτε το } \lambda \in \mathbb{R}.$$

4 μονάδες

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\eta\mu x + f(x))$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(f(3x) - f(x)) \eta\mu \frac{1}{x} \right]$$

2+3+4 μονάδες

Γ2. α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$.

3 μονάδες

$$\beta) \text{ Να βρείτε τη τιμή του } \alpha > 0 \text{ για την οποία ισχύει } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha f(x) + 3x \ln \alpha}{x f(x) + x^2 + 2\eta\mu x} = \frac{-4 \ln \alpha + 1}{3}.$$

6 μονάδες

Γ3. Αν $\lambda > e$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{f(x)+1} - \lambda^{f(x)}}{e^{f(x)} + \lambda^{f(x)+1}}$.

7 μονάδες

Θέμα Δ

Ένας πεζοπόρος Π ξεκινάει από ένα σημείο $A(1, 0)$ και βαδίζει γύρω από μία κυκλική λίμνη ακτίνας $r=1\text{Km}$ με σταθερή ταχύτητα $v=4\text{Km/h}$. Έστω S είναι το μήκος του τόξου $ΑΠ$ και λ το μήκος της απόστασης $ΑΠ$ του πεζοπόρου από το σημείο εκκίνησης A .

Δ1. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) \theta = S \text{ και } \lambda = 2\eta\mu \frac{\theta}{2} \quad \beta) \theta(t) = 4t \text{ rad και } \lambda(t) = 2\eta\mu(2t)$$

4 μονάδες

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta(t) - \lambda(t)}{t} = 0$

6 μονάδες

Δ3. Να υπολογίσετε τα όρια

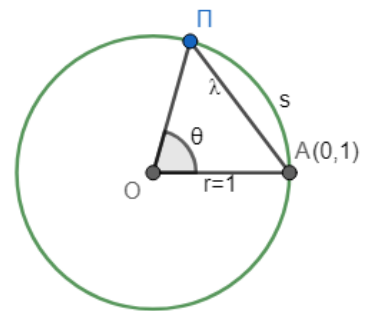
$$\alpha) \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\theta(t) - \lambda(t)}{t} \eta\mu \frac{1}{t} \right) \quad \text{και} \quad \beta) \lim_{t \rightarrow 0} \left(t \frac{\eta\mu \frac{1}{t} - 2025}{\theta(t) - \lambda(t)} \right)$$

6 μονάδες

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\theta(t) - \lambda(t) - 2\pi}{t - \frac{\pi}{2}} = 0 \quad \beta) \lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(\theta(t) - 4)(t - 2)}}{\sqrt{t - t^3} + \sqrt{t - t^5}} = \frac{2}{2 + \sqrt{2}} \quad \gamma) \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\eta\mu\lambda(t))}{\lambda^2(t) - \lambda(t)} = -1$$

9 μονάδες



Καλή τύχη!