Πατήστε στο σύνδεσμο για να μεταβείτε στο κριτήριο:

👇

https://forms.gle/mcMusHqt9FQGfnbv6

Στις επόμενες σελίδες οι λύσεις

👇

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2+3x-\dfrac{3x^2+5}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^2(x-1)+3x(x-1)-3x^2-5}{x-1}=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3+2x^2+3x^2-3x-3x^2-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^3+2x^2-3x-5}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^2\right)=-\infty$. **Σωστή απάντηση η Β.**

2. **Επειδή** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+1\right)=+\infty$ **είναι** $x^2-x>0$ **και** $x+1>0$, **όταν** $x\to+\infty$, **άρα:**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left|x^2-x\right|+3}{x^2+\left|x+1\right|}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}=1$. **Σωστή απάντηση η Ε.**

3. $f\left(x\right)=\dfrac{\alpha x^2-4}{\beta x-2}-x+2=\dfrac{\alpha x^2-4-x\left(\beta x-2\right)+2\left(\beta x-2\right)}{\beta x-2}=$

$\dfrac{\left(\alpha-\beta\right)x^2+\left(2\beta+2\right)x-8}{\beta x-2}$.

- **Αν** $\alpha-\beta\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq\beta$ **και** $\beta\neq0$ **τότε:**

$$\lim_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\alpha-\beta\right)x^2}{\beta x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta}\cdot x\right)$$

Αν $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}>0$ **τότε** $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ **ενώ αν** $\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}<0$ **τότε** $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=-\infty$.

Επομένως απορρίπτεται αυτή η περίπτωση.

- **Αν** $\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$ **και** $\beta\neq0$ **τότε:** $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2\beta+2\right)x-8}{8x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(2\beta+2-\dfrac{8}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\beta-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\beta+2-\dfrac{8}{x}}{\beta-\dfrac{2}{x}}=\dfrac{2\beta+2}{\beta}$.

Πρέπει: $\dfrac{2\beta+2}{\beta}=1\Leftrightarrow2\beta+2=\beta\Leftrightarrow\beta=-2$ **και** $\alpha=-2$.

- **Αν** $\alpha-\beta\neq0\Leftrightarrow\alpha\neq\beta$ **και** $\beta=0$ **τότε:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^2+2x-8}{-2} = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right).$$

Αν $\alpha>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ενώ, αν $\alpha<0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Επομένως απορρίπτεται αυτή η περίπτωση.

- **Αν $\alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$ και $\beta=0$, δηλαδή $\alpha=\beta=0$, τότε:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x-8}{-2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{-2} = \lim_{x\to+\infty}(-x) = -\infty$$

Άρα για να ισχύει το ζητούμενο πρέπει $\alpha=\beta=-2$. Σωστή απάντηση η Δ.

4. $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+x+5}-2x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{4x^2+x+5}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+x+5}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+x+5}+2x} =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+x+5-4x^2}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}+2\right)} = \frac{1}{4}.$$

Σωστή απάντηση η Α.

5. Έστω $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}+\alpha x+\beta,\ x\in\mathbb{R}$. Για $x\in(-\infty,0)$ είναι:

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+\alpha x+\beta = -x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+\alpha x+\beta =$$

$x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)$ **Είναι** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+\alpha+\frac{\beta}{x}\right)=\alpha-1$**, οπότε:**

- **Αν $\alpha-1>0\Leftrightarrow\alpha>1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.**
- **Αν $\alpha-1<0\Leftrightarrow\alpha<1$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ πρέπει**

$\alpha-1=0\Leftrightarrow\alpha=1$. Τότε: $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}+x+\beta \Leftrightarrow$

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+4}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)}{\sqrt{x^2+2x+4}-x}+\beta\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{\cancel{x^2}+2x+4-\cancel{x^2}}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-x}+\beta=\frac{\cancel{x}\left(2+\frac{4}{x}\right)}{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-1\right)}+\beta=-1+\beta,$$

οπότε, $-1+\beta=3\Leftrightarrow\beta=4$.

Σωστή απάντηση η Γ.

6. **Είναι** $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\text{ημ}x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{\text{ημ}x}{x}\right)=+\infty$.

Για $x\in(0,+\infty)$, **έχουμε:** $\left|\frac{\text{ημ}x}{x}\right|=\frac{|\text{ημ}x|}{|x|}\le\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}\Leftrightarrow-\frac{1}{x}\le\frac{\text{ημ}x}{x}\le\frac{1}{x}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, **από το κριτήριο παρεμβολής είναι** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{ημ}x}{x}=0$.

Σωστή απάντηση η Δ.

7. **Θέτουμε** $\frac{1}{x}=u$. **Όταν** $x\to-\infty$ **τότε** $u\to0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\text{ημ}\frac{1}{x}}{x+2}=\lim\limits_{u\to0}\left(\frac{1}{2u+1}\frac{\text{ημ}u}{u}\right)=1$.

Σωστή απάντηση η Ε.

8. $-1\le\text{συν}x\le1\Leftrightarrow1\le2+\text{συν}x\le3\Leftrightarrow\frac{1}{3}\le\frac{1}{2+\text{συν}x}\le1\overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\frac{x+3}{3}\le\frac{x+3}{2+\text{συν}x}\le x+3$. **Είναι** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{3}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+3)=+\infty$ **οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι** $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+3}{2+\text{συν}x}=+\infty$.

Σωστή απάντηση η Δ.

9. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x+3^{x+1}}{2^{x+1}+3^{x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{3^x}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x+3\right)}{\cancel{3^x}\left(2\left(\frac{2}{3}\right)^x+27\right)}=\frac{1}{9}.$$

Σωστή απάντηση η Α.

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x+2}+3\right)-x-2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(e^{x+2}+3\right)-\ln e^{x+2}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^{x+2}+3}{e^{x+2}}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{\cancel{e^{x+2}}\left(1+\frac{3}{e^{x+2}}\right)}{\cancel{e^{x+2}}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{3}{e^{x+2}}\right)\overset{u=1+\frac{3}{e^{x+2}}}{\underset{x\to+\infty,\ u\to1}{=}}\lim_{u\to1}\ln u=0.$$

Σωστή απάντηση η Γ.

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{\sqrt{x^2+1}}-2^{\sqrt{x^2+2x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2^{\sqrt{x^2+1}}\left(1-\frac{2^{\sqrt{x^2+2x}}}{2^{\sqrt{x^2+1}}}\right)\right]=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2^{\sqrt{x^2+1}}\left(1-2^{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}}\right)\right]$. **Είναι:** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2-1}{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=1,\text{άρα}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{\sqrt{x^2+1}}-2^{\sqrt{x^2+2x}}\right)=-\infty$, **γιατί** $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}2^{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{u\to+\infty}2^u=+\infty$ **και** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-2^{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}}\right)=1-2=-1$

Σωστή απάντηση η Β.

12. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\frac{f(x)}{x}-3-\frac{6}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2f(x)-6x+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{f(x)}{x}-3-\frac{6}{x^2}}{2\left(f(x)-3x\right)+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}=0.$$

Σωστή απάντηση η Γ.

13. **Έστω ότι το $P(x)$ είναι ν-οστού βαθμού.**

Αν $\nu = 1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{x^2-1} = 0$ και αν $\nu > 2$ τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{x^2-1} = \pm\infty$.

Άρα για να είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{P(x)}{x^2-1} = 1$, πρέπει $\nu = 2$.

Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha = 1.$$

Έστω $\dfrac{x^2+\beta x+\gamma}{x^2-1} = f(x) \overset{x\neq\pm1}{\Leftrightarrow} x^2+\beta x+\gamma = f(x)\left(x^2-1\right)$ και

$$\lim_{x\to1}\left(x^2+\beta x+\gamma\right) = \lim_{x\to1}\left[f(x)\left(x^2-1\right)\right] \Leftrightarrow 1+\beta+\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -1-\beta.$$ **Τότε:**

$$\lim_{x\to1}\frac{P(x)}{x^2-1} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{x^2+\beta x-1-\beta}{x^2-1} = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)+\beta\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2+\beta}{2} = 3 \Leftrightarrow \beta = 4 \text{ και } \gamma = -5.$$ **Άρα $P(x) = x^2+4x-5$.**

Σωστή απάντηση η Ε.