Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

4ο Διαγώνισμα Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0$. Σύμφωνα με τις ιδιότητες ορίων, ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}P(x)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+...\alpha_1 x+\alpha_0\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_\nu x^\nu\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}\right)+\lim_{x\to x_0}\left(\alpha_1 x\right)+\lim_{x\to x_0}\alpha_0=$$

$$\alpha_\nu\lim_{x\to x_0}x^\nu+\alpha_{\nu-1}\lim_{x\to x_0}x^{\nu-1}+...+\alpha_1\lim_{x\to x_0}x+\alpha_0=\alpha_\nu x_0^\nu+\alpha_{\nu-1}x_0^{\nu-1}+...+\alpha_1 x+\alpha_0=P(x_0)$$

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και A_1 το σύνολο των σημείων του Α στο οποίο αυτή είναι παραγωγίσιμη. Αντιστοιχίζοντας κάθε $x\in A_1$ στο $f'(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

$f':A_1\to\mathbb{R}$, $x\to f'(x)$, η οποία ονομάζεται πρώτη παράγωγος της f ή απλά παράγωγος της f.

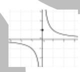
Η νιοστή παράγωγος της f με $\nu\ge 3$ συμβολίζεται με $f^{(\nu)}$ και είναι: $f^{(\nu)}=\left[f^{(\nu-1)}\right]'$

Α3. α) Λάθος

β) Έστω ότι έχουμε την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$ η οποία

έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα y΄y και για $x=0$ η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y.

Α4. Η αντικατάσταση $x=\frac{1}{u}$ δεν είναι σωστή διότι όταν το x



παίρνει την τιμή μηδέν, δεν υπάρχει αντίστοιχο u.

Α5. α) Λάθος.

Θα χρησιμοποιήσουμε την λέξη υποσύνολο:

Αν μία συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το Α και η παράγωγός της έχει πεδίο ορισμού το Β τότε θα ισχύει πάντα ότι το Β είναι υποσύνολο του Α.

β) Σωστό

γ) Λάθος.

Θα χρησιμοποιήσουμε την λέξη συνεχής ή την λέξη παραγωγίσιμη, καθώς αν είναι παραγωγίσιμη είναι και συνεχής:

Μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτή

Θέμα Β

Β1. Έστω $g(x)=u\Leftrightarrow 2x-1=u\Leftrightarrow x=\frac{u+1}{2}$. Είναι $x\neq\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{u+1}{2}\neq\frac{1}{2}\Leftrightarrow u\neq 0$. Τότε:

$$f(g(x))=\frac{4x^2-4x+5}{2x-1}\Leftrightarrow f(u)=\frac{4\left(\frac{u+1}{2}\right)^2-\cancel{4}^{2}\frac{u+1}{\cancel{2}}+5}{\cancel{2}\frac{u+1}{\cancel{2}}-1}=\frac{\cancel{4}\frac{u^2+2u+1}{\cancel{4}}-2u-2+5}{u}=\frac{u^2+4}{u}.$$

Άρα $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$, $x\neq 0$

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f'(x)=\frac{2x\cdot x-\left(x^2+4\right)\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	||	$+$		$+$	
f'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
f		↗		↘	||	↘		↗	
			Τ.Μ.				Τ.Ε.		

Για κάθε $x<-2$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο – 2, είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$. Για κάθε $x\in(-2,0)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο – 2, είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,0)$.Για κάθε $x\in(0,2)$ είναι $f'(x)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 2, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,2]$. Για κάθε $x>2$ είναι $f'(x)>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 2, είναι γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty)$. Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-4$ και τοπικό ελάχιστο το $f(2)=4$.

Β3. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ με $f''(x)=\left(1-\frac{4}{x^2}\right)'=\frac{8}{x^3}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f\frown(-\infty,0)$ και για κάθε $x>0$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f\smile(0,+\infty)$

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2+4}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(x^2+4)\frac{1}{x}\right]=4(+\infty)=+\infty$ και

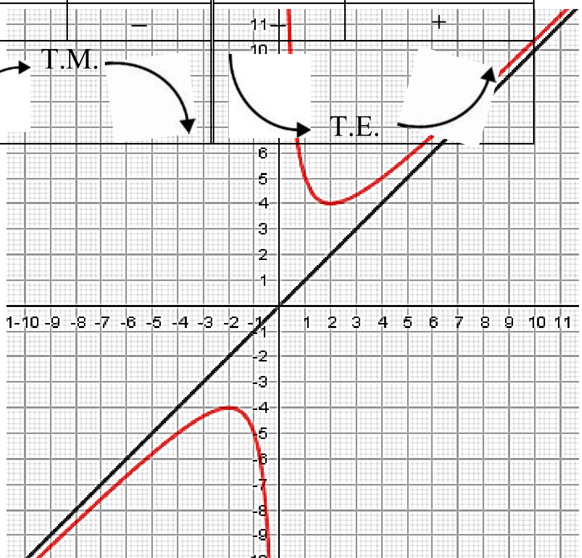
$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2+4}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left[(x^2+4)\frac{1}{x}\right]=4(-\infty)=-\infty$ άρα η ευθεία $x=0$, δηλαδή ο άξονας y΄y, είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+4}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}}{x}=0$, άρα η ευθεία $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και κάνοντας την ίδια διαδικασία είναι και στο $-\infty$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}=-\infty$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f''		$-$		$-$	||	$+$		$+$	
f'		$+$		$-$	||	$-$		$+$	
f		↗	Τ.Μ.	↘	||	↘	Τ.Ε.	↗	



B5. Έστω $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$. Η εφαπτομένη στο M είναι κάθετη στην ευθεία δ: $y = x$, αν και μόνο αν

$$f'\left(x_0\right)\cdot\lambda_\delta = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2-4}{x_0^2} = -1 \Leftrightarrow x_0^2 - 4 = -x_0^2 \Leftrightarrow 2x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0^2 = 2 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{2}$$

Είναι $f\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2+4}{\sqrt{2}} = \dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ και $f\left(-\sqrt{2}\right) = \dfrac{\left(-\sqrt{2}\right)^2+4}{-\sqrt{2}} = -\dfrac{6}{\sqrt{2}} = -3\sqrt{2}$.

Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A\left(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right)$ και $B\left(-\sqrt{2}, -3\sqrt{2}\right)$. Επειδή το μέσο του τμήματος AB είναι το $O(0,0)$, τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς το O.

B6. Έστω $M\left(x(t), y(t)\right)$, $x(t) < 0$, $y(t) = f\left(x(t)\right) = \dfrac{x^2(t)+4}{x(t)}$.

Επειδή η τετμημένη του M μειώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, είναι $x'(t) = -2$.

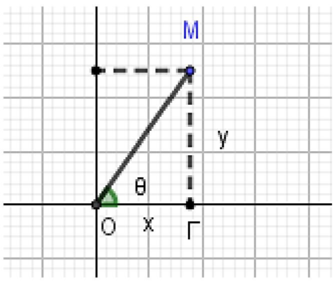
Αν $t = t_0$ η χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο $(-4,-5)$, τότε $x\left(t_0\right) = -4$ και $t\left(t_0\right) = -5$.

α) Ο ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M είναι

$y'(t) = \left(f\left(x(t)\right)\right)' = f'\left(x(t)\right)x'(t) = \dfrac{x^2(t)-4}{x^2(t)}x'(t)$ και τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι

$$y'\left(t_0\right) = \frac{x^2\left(t_0\right)-4}{x^2\left(t_0\right)}x'\left(t_0\right) = \frac{16-4}{16}(-2) = -\frac{3}{2} \text{ μ.μ./sec}$$

β) Είναι $\varepsilon\varphi\theta(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)} = \dfrac{\dfrac{x^2(t)+4}{x(t)}}{x(t)} = \dfrac{x^2(t)+4}{x^2(t)} = 1 + \dfrac{4}{x^2(t)}$



$\left(\varepsilon\varphi\theta(t)\right)' = \left(1+\dfrac{4}{x^2(t)}\right)' \Rightarrow \dfrac{\theta'(t)}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} = -\dfrac{8}{x^3(t)}x'(t)$ και τη χρονική

στιγμή $t = t_0$: $\theta'\left(t_0\right) = -\dfrac{8x'\left(t_0\right)}{x^3\left(t_0\right)}\sigma\upsilon\nu^2\theta\left(t_0\right)$.

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΓΜ τη χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε:

$(OM)\left(t_0\right) = \sqrt{(-4)^2+(-5)^2} = \sqrt{41}$, οπότε $\sigma\upsilon\nu\theta\left(t_0\right) = \dfrac{x\left(t_0\right)}{(OM)\left(t_0\right)} = -\dfrac{4}{\sqrt{41}}$

και $\theta'\left(t_0\right) = -\dfrac{8}{(-4)^3}(-2)\left(-\dfrac{4}{\sqrt{41}}\right)^2 = -\dfrac{4}{41}\text{rad / sec}$

Θέμα Γ

Γ1. $\int_0^1 \left(9x^2+2f(1)-2\right)dx \le 3\int_0^1 f'(x)dx \le \int_0^1\left(9x^2-4f(1)-4+f(2)\right)dx \Leftrightarrow$

$\left[3x^3+2f(1)x-2x\right]_0^1 \le \left[3f(x)\right]_0^1 \le \left[3x^3-4f(1)x-4x+f(2)x\right]_0^1 \Leftrightarrow$

$3+2f(1)-2 \le 3f(1)-\cancel{3f(0)}^{0} \le 3-4f(1)-4+f(2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 1+2f(1)\le 3f(1) \\ 3f(1)\le -1-4f(1)+f(2)\ (2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1\le f(1)\ \ (1) \\ f(2)\ge 7f(1)+1\ge 7+1=8\end{cases}$$

$\int_0^2 \left(9x^2+2f(1)-2\right)dx \le \int_0^2 3f'(x)dx \le \int_0^2\left(9x^2-4f(1)-4+f(2)\right)dx \Leftrightarrow$

$\left[3x^3+2f(1)x-2x\right]_0^2 \le \left[3f(x)\right]_0^2 \le \left[3x^3-4f(1)x-4x+f(2)x\right]_0^2 \Leftrightarrow$

$24+4f(1)-4 \le 3f(2)-\cancel{3f(0)}^{0} \le 24-8f(1)-8+2f(2) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 20+4f(1)\le 3f(2) \\ 3f(2)\le 16-8f(1)+2f(2)\end{cases} \overset{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 3f(2)\ge 20+4f(1)\ge 24 \\ 8\le 8f(1)\le 16-f(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2)\ge 8 \\ 16-f(2)\ge 8 \Rightarrow f(2)\le 8\end{cases}$$

Άρα $f(2)=8$

Από τη σχέση (2) είναι $3f(1)\le -1-4f(1)+8 \Leftrightarrow 7f(1)\le 7 \Leftrightarrow f(1)\le 1$ (2)

Από τις (1),(2) είναι $f(1)=1$

Η δοθείσα σχέση γίνεται: $9x^2+2\cdot 1-2\le 3f'(x)\le 9x^2-4\cdot 1-4+8 \Leftrightarrow 9x^2\le 3f'(x)\le 9x^2 \Leftrightarrow$

$3x^2\le f'(x)\le 3x^2 \Leftrightarrow f'(x)=3x^2 \Leftrightarrow f(x)=x^3+c$ και αφού $f(0)=0$, είναι $c=0$,

άρα $f(x)=x^3$

Γ2. Είναι $f'(x)=3x^2>0$ για $x\ne 0$ οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αφού είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται. $f(x)=y \Leftrightarrow x^3=y$.

Αν $y\ge 0$ τότε $x=\sqrt[3]{y} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$ οπότε $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

Αν $y<0$ τότε $x=\sqrt[3]{y} \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\sqrt[3]{-y}$ οπότε $f^{-1}(x)=-\sqrt[3]{-x}$.

Άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & ,x\ge 0\\ -\sqrt[3]{-x} & ,x<0\end{cases}$.

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο Α είναι :

$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y-\alpha^3=3\alpha^2\cdot(x-\alpha) \Leftrightarrow y=3\alpha^2\cdot x-2\alpha^3$.

$f(x)=3\alpha^2x-2\alpha^3 \Leftrightarrow x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3=0 \Leftrightarrow x^3-\alpha^2x-2\alpha^2x+2\alpha^3=0 \Leftrightarrow$

$x(x^2-\alpha^2)-2\alpha^2(x-\alpha)=0 \Leftrightarrow x(x-\alpha)(x+\alpha)-2\alpha^2(x-\alpha)=0 \Leftrightarrow$

$(x-\alpha)(x^2+\alpha x-2\alpha^2)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha)$ ή

$(x^2+\alpha x-2\alpha^2=0 \Leftrightarrow x^2-\alpha^2+\alpha x-\alpha^2=0 \Leftrightarrow$

$(x-\alpha)(x+\alpha)+\alpha(x-\alpha)=0 \Leftrightarrow (x-\alpha)(x+2\alpha)=0 \Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=-2\alpha)$.

Είναι $f(-2\alpha)=(-2\alpha)^3=-8\alpha^3$. Άρα έχουν και άλλο κοινό σημείο εκτός από το Μ το $N(-2\alpha,-8\alpha^3)$.

Είναι $f'(-2\alpha)=3(-2\alpha)^2=3\cdot 4\alpha^2=4\cdot 3\alpha^2=4f'(\alpha)$.

Άρα η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο Μ

Γ4. $f^{-1}(x)>f(x) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}>x^3 \Leftrightarrow x>x^9 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1>x^8 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x<1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την C_f , οπότε η κατακόρυφη απόσταση των δύο καμπυλών είναι $d(x)=f^{-1}(x)-f(x)=\sqrt[3]{x}-x^3,\ x\in(0,1)$.

Είναι $d'(x)=f^{-1}(x)-f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-3x^2$ και

$$d'(x)\ge 0\Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\ge 3x^2\Leftrightarrow \frac{1}{27x^2}\ge 27x^6\Leftrightarrow x^8\le\frac{1}{3^6}\overset{x>0}{\Leftrightarrow} x\le\frac{1}{\sqrt[4]{27}}$$

Για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}}\right)$ είναι $d'(x)>0\Rightarrow d\nearrow\left(0,\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}}\right]$ και για κάθε $x\in\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}},1\right)$ είναι $d'(x)<0\Rightarrow d\searrow\left[\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}},1\right)$. Η κατακόρυφη απόσταση d γίνεται μέγιστη για $x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{27}}$.

Γ5. $f(x)=x^4-3x^2+7x-4\ (5)\Leftrightarrow x^4-x^3-3x^2+7x-4=0\Leftrightarrow$

$(x-1)(x^3-3x+4)=0\Leftrightarrow$

$x=1$ ή $x^3-3x+4=0$

1	-1	-3	7	- 4	ρ=1
	1	0	-3	4	
1	0	-3	4	0	

Έστω $g(x)=x^3-3x+4,\ x\in\mathbb{R}$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=3x^2-3$.

Είναι $g'(x)\ge 0\Leftrightarrow 3x^2-3\ge 0\Leftrightarrow x^2\ge 1\Leftrightarrow |x|\ge 1\Leftrightarrow x\le -1$ ή $x\ge 1$

Για κάθε $x\in(-\infty,-1)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow(-\infty,-1]$.

Για κάθε $x\in(-1,1)$ είναι $g'(x)<0\Rightarrow g\searrow[-1,1]$ και για κάθε $x\in(1,+\infty)$ είναι $g'(x)>0\Rightarrow g\nearrow[1,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty,\ g(-1)=6$ και $g(1)=2$.

Στο διάστημα $\Delta_1=(-\infty,-1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$g(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(-1)\right]=(-\infty,6]$.

Επειδή $0\in g(\Delta_1)$, η εξίσωση $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1.

Στο διάστημα $\Delta_2=[-1,1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα $g(\Delta_2)=[g(1),g(-1)]=[2,6]$.

Επειδή $0\notin g(\Delta_2)$ η εξίσωση $g(x)=0$ είναι αδύνατη στο Δ_2.

Στο διάστημα $\Delta_3=[1,+\infty)$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$g(\Delta_3)=\left[g(1),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=[2,+\infty)$. Επειδή $0\notin g(\Delta_3)$ η εξίσωση $g(x)=0$ είναι αδύνατη στο Δ_3.

Τελικά η (5) έχει 2 λύσεις.

Θέμα Δ

Δ1. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$g'(x)=e^{f(x)}+xf'(x)e^{f(x)}-\dfrac{1}{x}=e^{f(x)}(1+xf'(x))-\dfrac{1}{x}$. Η g' είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g''(x)=e^{f(x)}f'(x)(1+xf'(x))+e^{f(x)}(f'(x)+xf''(x))+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$g''(x)=e^{f(x)}\left(f'(x)+x(f'(x))^2+f'(x)+xf''(x)\right)+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow$$

$$g''(x)=e^{f(x)}\left(2f'(x)+x(f'(x))^2+xf''(x)\right)+\frac{1}{x^2}=e^{f(x)}\left(-\frac{e^{-f(x)}}{x^2}\right)+\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow$$

$g'(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$

Είναι $g'(e)=e^{f(e)}(1+ef'(e))-\dfrac{1}{e}=\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e}=0\Leftrightarrow c=0$ άρα $g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(e)=ee^{f(e)}-\ln e,=e\dfrac{1}{e}-1=1-1=0\Leftrightarrow c_1=0\Leftrightarrow g(x)=0$ για κάθε $x>1$.

Δ2. $g(x)=0\Leftrightarrow xe^{f(x)}-\ln x=0\Leftrightarrow xe^{f(x)}=\ln x\Leftrightarrow e^{f(x)}=\dfrac{\ln x}{x}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\Leftrightarrow$

$f(x)=\ln(\ln x)-\ln x$

Για κάθε $x>1$ είναι $0<\ln x<x-1<x\Rightarrow \ln(\ln x)<\ln x\Leftrightarrow \ln(\ln x)-\ln x<0\Leftrightarrow f(x)<0$

Δ3. Είναι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\ln(\ln x)-\ln x\right)\overset{\ln x=u}{\underset{u\to 0^+}{=}}\lim\limits_{u\to 0^+}(\ln u-u)=-\infty$, άρα η $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(\ln x)-\ln x\right)\overset{\ln x=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}(\ln u-u)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left[u\left(\dfrac{\ln u}{u}-1\right)\right]=+\infty$ γιατί

$\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{u}}{1}=0$, άρα η C_f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(\ln x)-\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1-\ln x}{x\ln x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\ln x}-1\right)\right)=0(0-1)=0$ άρα η C_f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Δ4. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν $x_1,x_2>1$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια, ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=0$

Είναι $f''(x)=\dfrac{\ln^2 x-\ln x-1}{(x\ln x)^2}$.

Το τριώνυμο $\omega^2-\omega-1$ έχει ρίζες $\omega_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Όμως με $\omega=\ln x>0$ για $x>1$, είναι

$\omega^2-\omega-1<0$ για κάθε $\omega\in\left(0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ και $\omega^2-\omega-1>0$ για κάθε $\omega>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x>e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=x_0$.

Άρα για κάθε $x\in(1,x_0)$ είναι $f''(x)<0\Rightarrow f'\searrow(1,x_0]$ και για κάθε $x>x_0$ είναι $f''(x)>0\Rightarrow f'\nearrow[x_0,+\infty)$.

Είναι $f''(x_0)=0\Leftrightarrow\dfrac{\ln^2 x_0-\ln x_0-1}{(x_0\ln x_0)^2}=0\Leftrightarrow \ln^2 x_0-\ln x_0-1=0\Leftrightarrow \ln x_0(\ln x_0-1)=1\Leftrightarrow$

$\ln x_0-1=\dfrac{1}{\ln x_0}$

Τότε $f'(x_0)=\dfrac{1-\ln x_0}{x_0\ln x_0}=\dfrac{-\frac{1}{\ln x_0}}{x_0\ln x_0}=-\dfrac{1}{x_0\ln^2 x_0}<0$.

$\lim\limits_{x\to 1^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-\ln x}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)=1(+\infty)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\ln x}{x\ln x}\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x(\ln x+1)}=0$

Στο διάστημα $A_1=(1,x_0)$ η f' είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(A_1)=(f'(x_0),+\infty)$.

Στο διάστημα $A_2=(x_0,+\infty)$ η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f'(A_2)=(f'(x_0),0)$

Έστω $\alpha\in\left(f'(x_0),0\right)$, τότε $-\alpha\in\left(0,-f'(x_0)\right)$. Επειδή $\alpha\in f'(A_2)$ υπάρχει $x_1\in A_2$ τέτοιο, ώστε $f'(x_1)=\alpha$. Επειδή $-\alpha\in f'(A_1)$ υπάρχει $x_2\in A_1$ τέτοιο, ώστε $f'(x_2)=-\alpha$. Είναι $f'(x_1)+f'(x_2)=0$.

Δ5. $\int_e^{e^2} f(x)dx=\int_e^{e^2} x'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2} xf'(x)dx=e^2f\left(e^2\right)-ef(e)-\int_e^{e^2}\cancel{x}\frac{1-\ln x}{\cancel{x}\ln x}dx\Leftrightarrow$

$\int_e^{e^2} f(x)dx=e^2(\ln 2-2)-e(-1)-\int_e^{e^2}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)dx=e^2(\ln 2-2)+\cancel{e}-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx+e^2-\cancel{e}\Leftrightarrow$

$\int_e^{e^2} f(x)dx=e^2(\ln 2-1)-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx$

Για κάθε $x>1$ είναι $0<\ln x<x-1\Leftrightarrow\frac{1}{\ln x}>\frac{1}{x-1}\Rightarrow\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx>\int_e^{e^2}\frac{1}{x-1}dx=\left[\ln(x-1)\right]_e^{e^2}\Leftrightarrow$

$e^2(\ln 2-1)-\int_e^{e^2}\frac{1}{\ln x}dx<e^2(\ln 2-1)-\ln(e+1)$.

Άρα $\int_e^{e^2} f(x)dx<e^2(\ln 2-1)-\ln(e+1)$.