19η Άσκηση

Έως το κ/0

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$ και $g(x)=e^x+x-1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της g.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ **ii.** $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$

δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

ε) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f\circ g$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

στ) Να δείξετε ότι η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

ζ) Να δείξετε ότι η $f\circ g$ αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η $f\circ g$ βρίσκεται πάνω από την $(f\circ g)^{-1}$.

η) Να λύσετε την ανίσωση $e^{\etaμx}-e^x<x-\etaμx$

Στέλιος Μιχαήλογλου

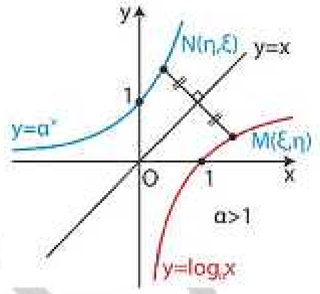
Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, είναι: $e^{x_1} < e^{x_2}$ (1) και $x_1 - 1 < x_2 - 1$ (2).

Από $(1)+(2) \Rightarrow g(x_1) < g(x_2) \Rightarrow g \nearrow \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι $g(0)=0$, οπότε για $x<0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)<g(0) \Leftrightarrow g(x)<0$ ενώ

για $x>0 \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(x)>g(0) \Leftrightarrow g(x)>0$



β) Από τη Β΄ Λυκείου γνωρίζουμε ότι για κάθε $x>0$ είναι $\ln x < x$.

Αρκεί $g(x) > x \Leftrightarrow e^x + \cancel{x} - 1 > \cancel{x} \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ που ισχύει.

Άρα για κάθε $x>0$ είναι $f(x) < x < g(x)$.

γ) i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)\dfrac{1}{g(x)}\right] = -\infty(+\infty) = -\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{g(x)} \underset{\substack{x\to 0^+ \Rightarrow \\ u\to 0^+}}{\overset{g(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{1}{u} = +\infty$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x \dfrac{1}{x}\right) = -\infty(+\infty) = -\infty$

δ) Για να ορίζεται η $f\circ g$ πρέπει: $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow g(x) > g(0) \Leftrightarrow x > 0$, άρα $D_{f\circ g} = (0,+\infty)$.

Είναι $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(e^x + x - 1)$.

ε) Όπως είπαμε και στο β΄ σκέλος, για κάθε $x>0$ είναι $\ln x < x$, οπότε και

$\ln g(x) < g(x) \Leftrightarrow (f\circ g)(x) < g(x)$

στ) Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2$ είναι

$g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow \ln g(x_1) < \ln g(x_2) \Leftrightarrow (f\circ g)(x_1) < (f\circ g)(x_2) \Leftrightarrow f\circ g \nearrow (0,+\infty)$

ζ) Επειδή η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1 και αντιστρέφεται.

Επειδή οι γραφικές παραστάσεις των $f\circ g$ και $(f\circ g)^{-1}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y=x$ αρκεί η $f\circ g$ να βρίσκεται πάνω από την $y=x$. Είναι

$(f\circ g)(x) > x \Leftrightarrow \ln(e^x + x - 1) > x \Leftrightarrow \cancel{e^x} + x - 1 > \cancel{e^x} \Leftrightarrow x > 1$.

Δηλαδή για $x>1$ η $C_{f\circ g}$ βρίσκεται πάνω από την $y=x$, οπότε η $C_{(f\circ g)^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την $y=x$,

επομένως $(f\circ g)(x) > (f\circ g)^{-1}(x)$.

η) $e^{\eta\mu x} - e^x < x - \eta\mu x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} + \eta\mu x < e^x + x \Leftrightarrow e^{\eta\mu x} + \eta\mu x - 1 < e^x + x - 1 \Leftrightarrow g(\eta\mu x) < g(x) \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} \eta\mu x < x$ (1)

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \neq 0$ είναι $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow -|x| < \eta\mu x < |x|$.

Αν $x>0$ τότε $-x < \eta\mu x < x$ ενώ αν $x<0$ είναι $x < \eta\mu x < -x$, οπότε $(1) \Leftrightarrow x > 0$.