

# Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



**Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:**

**Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς**

**Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς**

**Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας**



**2020 - 2021**



**Ασκησόπολις**  
ο πιο πλούσιος κόσμος  
θεμάτων και ασκήσεων

## 10ο Διαγώνισμα

27-4-2021

## Θέμα Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .

μονάδες 7

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

μονάδες 4

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν δύο συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε:  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x)$  ».

**α)** Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε:

**i.** το  $f(1)$  είναι τοπικό μέγιστο της  $f$

**ii.** το  $f(2)$  είναι τοπικό ελάχιστο της  $f$

**β)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

**γ)** Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

**δ)** Αν η  $f$  έχει δεύτερη παράγωγο στο  $x_0$ , τότε η  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

μονάδες 4+2+2+2

## Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{|x| + x}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x - \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ .

μονάδες 4

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ .

μονάδες 3

**B3.** Έστω  $\varphi(x) = (f \circ g)(x) = e^x - e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι  $g(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

μονάδες 3

**β)** Να αποδείξετε ότι η  $\varphi$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 5

**γ)** Να βρείτε την  $\varphi^{-1}$ .

μονάδες 5

**δ)** Να αποδείξετε ότι  $e^x - e^{-x} > x - \frac{1}{x}$  για κάθε  $x > 0$ .

μονάδες 5

## Θέμα Γ

Ευθεία  $(\varepsilon)$  στρέφεται γύρω από το σημείο της  $A(8,4)$  με ρυθμό  $\lambda'(t) = \frac{9}{160} \text{ min}^{-1}$  όπου  $\lambda \in (0, +\infty)$  είναι ο

συντελεστής διεύθυνσής της  $(\varepsilon)$ . Εάν η ευθεία  $(\varepsilon)$  τέμνει τους άξονες  $x'x$ ,  $y'y$ , στα σημεία  $K$ ,  $\Lambda$  αντίστοιχα, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ είναι  $E(\lambda) = 8\left(\frac{1}{\lambda} - 4 + 4\lambda\right)$ .

μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΚΛ ως προς το χρόνο τη χρονική στιγμή που η ευθεία περνάει από το σημείο Β(4,1).

μονάδες 6

Γ3. Να αποδείξετε ότι η  $E'(x) = 8\left(-\frac{1}{x^2} + 4\right)$  είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η  $g(x) = (E')^{-1}(x)$ .

μονάδες 7

Γ4. Να βρείτε τη μονοτονία της  $g$  και της συνάρτησης  $f(x) = e^{-1821x} - x^{1821} + 2021$  και να αποδείξετε ότι αυτές έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

μονάδες 6

### Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης  $e^{-x} \cdot (\eta\mu x + x^2 + x + 2) = 2$ .

μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$g(x) = \sqrt{\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 1 - \ln(\eta\mu x - 2e^x + x^2 + x + 2)}.$$

μονάδες 4

Δ4. Αν η  $f$  είναι κυρτή αύξουσα στο  $(-\infty, 0]$  και κοίλη  $[0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς εφαπτομένες παράλληλες στην ευθεία  $(\delta): y = (\pi - e^\pi) \cdot x - 2021$

μονάδες 7

Καλή Τύχη!