ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \Leftrightarrow |z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2 \Leftrightarrow$

$(z_1\cdot z_2)(\overline{z_1\cdot z_2})=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2 \Leftrightarrow z_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=z_1\cdot\bar{z}_1\cdot z_2\cdot\bar{z}_2$ που ισχύει

Α.2. **α.** Σ **β.** Λ **γ.** Λ **δ.** Σ **ε.** Σ

Β.1. 1.ζ 2. γ 3. α 4. δ 5. β

Β.2. $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\alpha x^2\right)=9\alpha=f(3)$ και

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-e^{x-3}}{x-3} \underset{DL'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 3^+}\frac{\left(1-e^{x-3}\right)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to 3^+}\frac{-e^{x-3}(x-3)'}{1}=\lim_{x\to 3^+}\left(-e^{x-3}\right)=-e^0=-1.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και στο $x_0=3$, οπότε ισχύει :

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3) \Leftrightarrow 9\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{9}.$$

β. Για $x>3$ είναι $f(x)=\frac{1-e^{x-3}}{x-3}$ οπότε $f(4)=\frac{1-e}{4-e}=1-e$ και

$$f'(x)=\frac{\left(1-e^{x-3}\right)'-(x-3)'\left(1-e^{x-3}\right)}{(x-3)^2}=\frac{-e^{x-3}(x-3)-1+e^{x-3}}{(x-3)^2}\text{ , άρα } f'(4)=\frac{-e\cdot 1-1+e}{(4-3)^2}=-1.$$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A\left(4,f(4)\right)$ είναι:

$$y-f(4)=f'(4)(x-4) \Leftrightarrow y-(1-e)=-1(x-4) \Leftrightarrow y=-x+4+1-e \Leftrightarrow y=-x+5-e\ .$$

γ. Όταν $x\in[1,2]$ είναι $f(x)=-\frac{1}{9}x^2<0$ οπότε $E(\Omega)=-\int_1^2\left(-\frac{1}{9}x^2\right)dx=\frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{7}{27}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Εστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$.

Τότε, επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, λόγω του Θ. Fermat ισχύει : $f'\left(x_0\right)=0$.

Είναι : $f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1$ (1), οπότε

$$\left(f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)\right)'=\left(x^3-2x^2+6x-1\right)' \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x)\cdot f'(x)+2\beta f(x)\cdot f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)\left(3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma\right)=3x^2-4x+6 \quad (2).$$

Η σχέση (1) για $x=x_0$ γίνεται :

$f'(x_0)\cdot\left(3f^2(x_0)+2\beta f(x_0)+\gamma\right)=3x_0^2-4x_0+6 \Leftrightarrow 0=3x_0^2-4x_0+6$ που είναι αδύνατο αφού έχει $\Delta=-56<0$. Επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

β. Επειδή το τριώνυμο $3x^2-4x+6$ έχει $\Delta=-56<0$, είναι: $3x^2-4x+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ακόμη το τριώνυμο $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma$ έχει $\Delta=4\beta^2-12\gamma=4\left(\beta^2-3\gamma\right)<0$ οπότε

$3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Για $x=0$ η (1) γίνεται :

$$f^3(0)+\beta f^2(0)+\gamma f(0)=-1 \Leftrightarrow f(0)\cdot\left(f^2(0)+\beta f(0)+\gamma\right)=-1 \quad (3).$$

Το τρίγωνο $f^2(0)+\beta f(0)+\gamma$ έχει $\Delta=\beta^2-4\gamma=\beta^2-3\gamma-\gamma$ επειδή $\beta^2<3\gamma \Leftrightarrow \gamma>\dfrac{\beta^2}{3}\geq 0$

είναι $-\gamma<0$ και $\beta^2-3\gamma<0$, οπότε $\Delta<0$ και $f^2(0)+\beta f(0)+\gamma>0$.

Άρα από τη σχέση (3) έχουμε ότι : $f(0)<0$.

Για $x=1$ η σχέση (1) γίνεται :

$$f^3(1)+\beta f^2(1)+\gamma f(1)=1-2+6-1 \Leftrightarrow f(1)\cdot\left(f^2(1)+\beta f(1)+\gamma\right)=4.$$

Επειδή το τριώνυμο $f^2(1)+\beta f(1)+\gamma$ έχει $\Delta=\beta^2-4\gamma<0$, είναι $f^2(1)+\beta f(1)+\gamma>0$ οπότε και $f(1)>0$. Δηλαδή $f(0)\cdot f(1)<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ λόγω του Θ. Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (0,1).

ΘΕΜΑ 4ο

α. Θέτουμε $u=xt$ οπότε $du=xdt$. Για $t=0$ είναι $u=0$ ενώ για $t=1$ είναι $u=x$, οπότε

$$f(x)=1-2\int_0^1 xtf^2(xt)xdt \Leftrightarrow f(x)=1-2\int_0^x uf^2(u)du.$$

Επειδή η συνάρτηση $uf^2(u)$ είναι συνεχής στο , η συνάρτηση $\int_0^x uf^2(u)du$ είναι παραγωγίσιμη, οπότε και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=-2xf^2(x)$ (1).

β. Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}-x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}-2x\overset{(1)}{=}-\frac{-2x\,\cancel{f^2(x)}}{\cancel{f^2(x)}}-2x=2x-2x=0 \Leftrightarrow g(x)=c,\ c\in\mathbb{R}.$$

γ. Εχουμε : $f'(x)=-2xf^2(x)\Leftrightarrow -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow \dfrac{1}{f(x)}=x^2+c$ (2).

Παρατηρούμε ότι $f(0)=1-2\int_0^0 uf^2(u)du=1$ οπότε στην (2) για $x=0$ έχουμε :

$\dfrac{1}{f(0)}=0+c\Leftrightarrow c=1$, άρα $\dfrac{1}{f(x)}=x^2+1\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

δ. Εχουμε : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xf(x)\eta\mu 2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\eta\mu 2x\right)$.

Επειδή $|\eta\mu 2x|\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ έχουμε

$\left|\dfrac{x}{x^2+1}\cdot\eta\mu 2x\right|=\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\cdot|\eta\mu 2x|\le\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\Leftrightarrow -\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\le\dfrac{x}{x^2+1}\cdot\eta\mu 2x\le\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}=\left(-\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{x}{x^2+1}\right|=0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x^2+1}\cdot\eta\mu 2x\right)=0$.