Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2019 - 2020

Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

3ο Διαγώνισμα Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Έστω ότι $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

— Αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Ομοίως, αν $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$.

Α2. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Α3. α) Ψευδής

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x,\ x\in\mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.

Είναι $f(0)=0$, $f(1)=1$. Επειδή $f(0)<\frac{1}{2}<f(1)$, αν η f ήταν συνεχής, σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, θα υπήρχε $x_0\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=\frac{1}{2}$ που είναι άτοπο.

2ος τρόπος

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της θα είναι διάστημα που είναι άτοπο.

Α4. Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και το θεώρημα που χρησιμοποιήθηκε εφαρμόζεται σε ένα διάστημα Δ και όχι σε ένωση διαστημάτων. Το σωστό θα ήταν να γραφεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της.

Α5. α) Σ β) Σ γ) Λ

Θέμα Β

Β1. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-2x=\frac{1-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}},x>0$.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow 4x\sqrt{x}=1\Leftrightarrow x\sqrt{x}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^3=\frac{1}{16}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

<u>1ος τρόπος εύρεσης προσήμου της παραγώγου:</u>

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0\Leftrightarrow 1-4x\sqrt{x}>0\Leftrightarrow x\sqrt{x}<\frac{1}{4}\Leftrightarrow x^3<\frac{1}{16}\Rightarrow 0<x<\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{1-4x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}<0 \Leftrightarrow 1-4x\sqrt{x}<0 \Leftrightarrow x\sqrt{x}>\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x^3>\dfrac{1}{16} \Rightarrow x>\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$

<u>2ος τρόπος εύρεσης προσήμου της παραγώγου:</u>

Η f' είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο $f''(x)=-\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-2=-\dfrac{1}{2x}-2<0$ για κάθε $x>0$ άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Για $0<x<\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}} \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}\right)=0$ και για $x>\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}} \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}\right)=0$

Επειδή η f είναι συνεχής στο μηδέν και στο $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$ τότε προκύπτει ο παρακάτω πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0		$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$		$+\infty$
f'		‖	$+$	0	$-$	
f		‖	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}$ το $K\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}},f\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}\right)\right)$.

Έχουμε $f''(x)=-\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}-2=-\dfrac{1}{2x}-2<0$ για κάθε $x>0$ άρα η f $\frown$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

B2. Επειδή η f έχει μέγιστο στο $x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}=\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$,για κάθε $x>0$ ισχύει ότι:

$f(x)\le f\left(\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}}\right)=\sqrt{\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}}-\left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}\right)^2-1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{16}}}-\dfrac{1}{4\sqrt[3]{4}}-1=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}-\dfrac{1}{4\sqrt[3]{4}}-1=\dfrac{3-4\sqrt[3]{4}}{4\sqrt[3]{4}}<0$

B3. Η συνάρτηση f μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο μηδέν αφού είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και το μηδέν είναι άκρο αυτού.

Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}-x^2-1\right)=-1$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Επίσης έχουμε ότι:

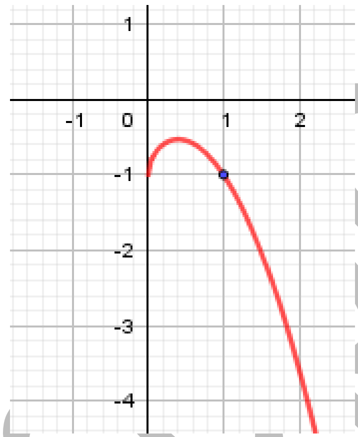
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}-x-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\cancel{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^{\cancel{2}}}-x-\dfrac{1}{x^2}\right)=(0-\infty-0)=-\infty$

Άρα η f δεν έχει ούτε πλάγιες ούτε οριζόντιες ασύμπτωτες.

Επίσης ισχύει $f(1)=-1$ και $f(x)<0$ για κάθε $x>0$ και έχουμε και τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$ 0	$\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f''	$-$		$-$
f	↗		↘

Και επίσης και με βάση ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -1$ μπορούμε να σχεδιάσουμε την f στο περίπου χωρίς ακριβέστατο προσδιορισμό της θέσεως του ακρότατου αλλά σε σχέση με αυτά που μας ζητάει η εκφώνηση. Οπότε έχουμε:



Β4. α) Επειδή απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με σταθερή ταχύτητα 1 m/sec άρα έχουμε ότι $x'(t) = 1$ για κάθε $t > 0$. Άρα ισχύει: $x'(t) = 1 \Leftrightarrow x(t) = t + c, t > 0, c \in \mathbb{R}$

Για $t = 1$ είναι $x(1) = 1$ άρα τελικά $c = 0$.

Άρα έχουμε $x(t) = t, t > 0$ και $y(t) = f(x(t)) = f(t) = \sqrt{t} - t^2 - 1$.

Επομένως η τεταγμένη y παρουσιάζει μέγιστο όπου και η συνάρτηση f δηλαδή για $t = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ sec το M έχει μέγιστη τεταγμένη.

β) Η απόσταση BM δίνεται από την συνάρτηση:

$$d(t) = \sqrt{(x(t)-1)^2 + (y(t)-1)^2}, t > 0$$

Η d είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση και πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$d'(t) = \frac{(x(t)-1)x'(t) + (y(t)-1)y'(t)}{\sqrt{(x(t)-1)^2 + (y(t)-1)^2}}, t > 0$$

Για $t = 1$ sec έχουμε:

$$d'(1) = \frac{(x(1)-1)x'(1) + (y(1)-1)y'(1)}{\sqrt{(x(1)-1)^2 + (y(1)-1)^2}} = \frac{(1-1)\cdot 1 + (-1-1)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2}} =$$

$$= \frac{(-1-1)\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{(-1-1)^2}} = \frac{-2\left(-\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$ m/sec, αφού $y'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} - 2t$ οπότε $y'(1) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

Θέμα Γ

Γ1. α) Έστω (1) η σχέση $h^3(x)+h(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$.

Με παραγώγιση της έχουμε :

$$3h^2(x)h'(x)+h'(x)=x^2+x+1 \Leftrightarrow h'(x)\left(\underbrace{3h^2(x)+1}_{>0}\right)=x^2+x+1 \Leftrightarrow$$

$h'(x)=\frac{x^2+x+1}{3h^2(x)+1}>0$ αφού $x^2+x+1>0$ ($(\Delta=-3<0)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα .

Γ2. Από τη σχέση (1) έχουμε : $h^3(x)+h(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x \Leftrightarrow h(x)\left(h^2(x)+1\right)=\frac{2x^3+3x^2+6x}{6} \Leftrightarrow$

$h(x)\left(\underbrace{h^2(x)+1}_{>0}\right)=\frac{x\left(2x^2-3x+6\right)}{6} \Leftrightarrow h(x)=\frac{x\left(2x^2-3x+6\right)}{6\left(h^2(x)+1\right)}>0$ αφού $x>0$ και

$2x^2-3x+6>0$ ($\Delta=-39<0$).

Όμως $h(x)=\lim\limits_{u\to 0}\frac{g(x+u)-g(x-u)}{2u}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{g(x+u)-g(x)}{u}-\frac{g(x-u)-g(x)}{u}\right)=$

$\frac{1}{2}\left(g'(x)+g'(x)\right)=g'(x)$.Άρα $g'(x)>0$ για $x\neq 0$, η g συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Γ3.α) $g(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right)\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\left(x\ln x\right)=1\cdot 0=0$ αφού

$\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x-1\right)\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\left(x\ln x\right)=1\cdot 0=0$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$.

β) Η συνάρτηση g' είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $g''(x)=h'(x)>0$ άρα η g είναι κυρτή.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x)=e^{\frac{g(x)}{x}}\cdot\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=xg'(x)-g(x), x\geq 0$.

Η συνάρτηση α είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο

$\alpha'(x)=\cancel{g'(x)}+xg''(x)-\cancel{g'(x)}=xg''(x)>0$ άρα η α είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Για $x>0\overset{\alpha\nearrow}{\Leftrightarrow}\alpha(x)>\alpha(0)\Leftrightarrow\alpha(x)>0\Leftrightarrow f'(x)>0$, η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Γ4.α) Το $\frac{1}{2}\in\left(g(0),g(1)\right)$, η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=\frac{1}{2}$.

β) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στα $\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right]$ άρα υπάρχουν

$\xi_1 \in \left(0,\frac{1}{2}\right), \xi_2 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοια ώστε $g'(\xi_1) = \dfrac{g\left(\frac{1}{2}\right) - g(0)}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow g'(\xi_1) = 2g\left(\frac{1}{2}\right)$,

$$g'(\xi_2) = \frac{g(1) - g\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow g'(\xi_2) = 2\left(1 - g\left(\frac{1}{2}\right)\right).$$

Επομένως $g'(\xi_1) + g'(\xi_2) = 2\left(1 - g\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 2g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(1 - g\left(\frac{1}{2}\right) + g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 2$.

γ) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του ΘΜΤ στα $[0,\xi],[\xi,1]$ άρα υπάρχουν $\theta_1 \in (0,\xi), \theta_2 \in (\xi,1)$ τέτοια ώστε

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi} \Leftrightarrow g'(\theta_1) = \frac{\frac{1}{2}}{\xi} \Leftrightarrow \frac{1}{g'(\theta_1)} = \frac{\xi}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{g'(\theta_1)} = 2\xi \ ,$$

$$g'(\theta_2) = \frac{g(1) - g(\xi)}{1-\xi} \Leftrightarrow g'(\theta_2) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1-\xi} \Leftrightarrow \frac{1}{g'(\theta_2)} = \frac{1-\xi}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{g'(\theta_2)} = 2 - 2\xi .$$

Επομένως $\dfrac{1}{g'(\theta_1)} + \dfrac{1}{g'(\theta_2)} = 2\xi + 2 - 2\xi = 2$.

Θέμα Δ

Δ1. Για να ορίζεται η f πρέπει $e^x + \mu \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq -\mu$ (1)

Αν $\mu \geq 0$ τότε η (1) είναι αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $D_f = \mathbb{R}$.

Στη περίπτωση αυτό η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αν $\mu < 0$ τότε η (1) γίνεται $x \neq \ln(-\mu)$ και $D_f = \mathbb{R} - \{\ln(-\mu)\}$.

Αν η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη, αυτή θα είναι η $x = \ln(-\mu)$. Επειδή η f έχει ασύμπτωτη την $x = 0$, πρέπει $\ln(-\mu) = 0 \Leftrightarrow -\mu = 1 \Leftrightarrow \mu = -1$

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lambda e^x + e^{-x}}{e^x + \mu} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{e^x}\left(\lambda + e^{-2x}\right)}{\cancel{e^x}\left(1 + \mu e^{-x}\right)} = \dfrac{\lambda + 0}{1 + \mu \cdot 0} = \lambda$.

Επειδή η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 1$ είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, άρα $\lambda = 1$.

Τότε $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - 1}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x + e^{-x}\right)\dfrac{1}{e^x - 1} = 2(+\infty) = +\infty$ γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{e^x - 1} \underset{\substack{x\to 0^+ \Rightarrow \\ u \to 0^+}}{\overset{e^x - 1 = u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+} \dfrac{1}{u} = +\infty$. Άρα η τιμή $\mu = -1$ είναι δεκτή.

Δ2. Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \dfrac{\left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x - 1\right) - \left(e^x + e^{-x}\right)e^x}{\left(e^x - 1\right)^2} = \dfrac{\cancel{e^{2x}} - e^x - 1 + e^{-x} - \cancel{e^{2x}} - 1}{\left(e^x - 1\right)^2} \Leftrightarrow$

$$f'(x)=\frac{-e^x+e^{-x}-2}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-e^x+\frac{1}{e^x}-2}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{\frac{-e^{2x}+1-2e^x}{e^x}}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-\left(e^{2x}+2e^x-1\right)}{e^x\left(e^x-1\right)^2}$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο της παράστασης $e^{2x}+2e^x-1$.

Έστω $h(x)=e^{2x}+2e^x-1,\ x\le 0$.

Είναι $h'(x)=2e^{2x}+2e^x>0\Rightarrow h\nearrow[0,+\infty)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}+2e^x-1\right)=-1$ και $h(0)=2$.

Επειδή η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(-\infty,0)$ έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta)=(-1,2)$. Επειδή $0\in f(\Delta)$ υπάρχει μοναδικό $x_0\in\Delta$ τέτοιο, ώστε $h(x_0)=0$.

Για κάθε $x<x_0$ είναι $h(x)<h(x_0)=0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,x_0]$.

Για κάθε $x_0<x<0$ είναι $h(x)>h(x_0)=0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[x_0,0)$. Οπότε η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0.

Δ3. $f(x)-f(x_0)=0\Leftrightarrow f(x)=f(x_0)$ (1)

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ η f παρουσιάζει μέγιστο στο x_0, οπότε $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x<0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=x_0$. Άρα η (1) έχει μοναδική ρίζα το x_0 στο διάστημα $(-\infty,0)$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(e^x+e^{-x}\right)\frac{1}{e^x-1}\right]=2(+\infty)=+\infty$.

Για κάθε $x>0$ είναι $h(x)>h(0)=2\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[0,+\infty)$

Στο διάστημα $\Delta=(0,+\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta)=(1,+\infty)$.

Για να έχει λύση η εξίσωση (1) στο Δ πρέπει το $f(x_0)$ να βρίσκεται στο $f(\Delta)=(1,+\infty)$.

Είναι $f(x_0)=\frac{e^{x_0}+e^{-x_0}}{e^{x_0}-1}$. Επειδή $x_0<0$ είναι $e^{x_0}<1\Leftrightarrow e^{x_0}-1<0$ και $e^{x_0}+e^{-x_0}>0$ άρα $f(x_0)<0$, οπότε $f(x_0)\notin f(\Delta)=(1,+\infty)$ και η (1) είναι αδύνατη στο $(0,+\infty)$.

Δ4. Θέτουμε $\ln x-x+1=u$. Είναι $\lim\limits_{x\to1}u=\lim\limits_{x\to1}(\ln x-x+1)=0$, και επειδή για κάθε $x>0$ είναι $\ln x\le x-1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$, είναι $\ln x<x-1$ για κάθε x πολύ κοντά στο 1, οπότε $\lim\limits_{x\to1}f(\ln x-x+1)=\lim\limits_{u\to0^-}f(u)=-\infty$.