**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ**
**ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ**
**ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2009**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1$^{\text{Ο}}$

**Α.** για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{x-x_0}{(x-x_0)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, δηλαδή $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

**Β.** Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο $x_0$ του πεδίου ορισμού της, όταν: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

**Γ.** **α.** Σ **β.** Σ **γ.** Λ **δ.** Λ **ε.** Σ

## ΘΕΜΑ 2$^{\text{Ο}}$

**α.** Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$. Τότε: $\left(2-i\right)z+\left(2+i\right)\bar{z}-8=0 \Leftrightarrow$

$$\left(2-i\right)\left(x+yi\right)+\left(2+i\right)\left(x+yi\right)-8=0 \Leftrightarrow$$
$$2x+2yi-xi+y+2x-2yi+xi+y-8=0 \Leftrightarrow$$
$$4x+2y-8=0 \Leftrightarrow$$
$$y=-2x+4 \ (1)$$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία ε: $y=-2x+4$.

**β.** Για $y=0$ η ε γίνεται $-2x+4=0 \Leftrightarrow x=2$ και για $x=0$ γίνεται $y=4$.
Άρα ο μοναδικός πραγματικός αριθμός που ικανοποιεί την (1) είναι ο $z_1=2$ και ο μοναδικός φανταστικός αριθμός είναι ο $z_2=4i$.

**γ.** $\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=\left|2+4i\right|^2+\left|2-4i\right|^2=\left(\sqrt{2^2+4^2}\right)^2+\left(\sqrt{2^2+\left(-4\right)^2}\right)^2=20+20=40$.

## ΘΕΜΑ 3$^{\text{O}}$

**Α.** Είναι $f(x)=\ln\left[(\lambda+1)x^2+x+1\right]-\ln(x+2)=\ln\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}$

Έστω $u=\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}$.

Αν $\lambda+1>0\Leftrightarrow\lambda>-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda+1)x^2+x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\lambda+1)x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda+1)x=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln u=+\infty$.

Αν $\lambda+1=0\Leftrightarrow\lambda=-1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln u=0$.

Άρα για να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός, πρέπει $\lambda=-1$.

**Β.** Για $\lambda=-1$ είναι $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x+2),\ x>-1$.

**α.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της με $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$.

Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x>-1$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Είναι $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]=-\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+1)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+2)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, οπότε για το σύνολο τιμών της f έχουμε:

$f(A)=f\left((-1,+\infty)\right)=\left(\lim\limits_{x\to-1}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,0)$.

**β.** Επειδή $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$ η $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_f$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της $C_f$.

**γ.** Είναι $-\alpha^2<0$ για κάθε $\alpha\neq0$, οπότε ο αριθμός $-\alpha^2$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f.
Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση $f(x)=-\alpha^2\Leftrightarrow f(x)+\alpha^2=0$, έχει μοναδική λύση για κάθε $\alpha\neq0$.

## ΘΕΜΑ 4$^{\text{O}}$

**α.** Είναι $g(0)=-\dfrac{f'(0)-2f(0)}{e^0}=-2f(0)+2f(0)=0$ και

$g(2)=12-\dfrac{f'(2)-2f(2)}{e^4}=12-\dfrac{2f(2)+12e^4-2f(2)}{e^4}=12-\dfrac{12e^4}{e^4}=0$, δηλαδή $g(0)=g(2)$.

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με

$$g'(x)=6x-\frac{\left(f''(x)-2f'(x)\right)e^{2x}-\left(f'(x)-2f(x)\right)2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2}=6x-\frac{f''(x)-4f'(x)+4f(x)}{e^{2x}},$$

ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0,2]$.

**β.** Λόγω του θεωρήματος Rolle, υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0\Leftrightarrow$

$$6\xi-\frac{f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)}{e^{2\xi}}=0\Leftrightarrow\frac{f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)}{e^{2\xi}}=6\xi\Leftrightarrow$$

$$f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}\Leftrightarrow f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$$

**γ.** Για $x=\xi$ η σχέση $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}$, γίνεται:

$$f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)=k\xi e^{2\xi}\Leftrightarrow 6\xi e^{2\xi}=k\xi e^{2\xi}\Leftrightarrow k=6$$

Τότε $g'(x)=6x-\dfrac{f''(x)-4f'(x)+4f(x)}{e^{2x}}=6x-\dfrac{6xe^{2x}}{e^{2x}}=6x-6x=0$, $g(x)=c$, $c\in\mathbb{R}$ για κάθε $x\in[0,2]$. Επειδή $g(0)=0$, είναι $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

**δ.** $g(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}=0\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}=3x^2\Leftrightarrow f'(x)e^{-2x}-2e^{-2x}f(x)=3x^2\Leftrightarrow$

$$\left(e^{-2x}f(x)\right)'=\left(x^3\right)'\Leftrightarrow e^{-2x}f(x)=x^3+c_1\Leftrightarrow f(x)=\left(x^3+c_1\right)e^{2x},c_1\in\mathbb{R}.$$

Επειδή $f(1)=e^2$, είναι $e^2=(1+c_1)e^2\Leftrightarrow c_1=0$, άρα $f(x)=x^3e^{2x},x\in[0,2]$.

**ε.** $$\int_1^2\frac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^2\frac{x^3e^{2x}}{x^2}dx=\int_1^2 xe^{2x}dx=\int_1^2 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=\left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_1^2-\int_1^2\frac{e^{2x}}{2}dx=$$

$$=e^4-\frac{e^2}{2}-\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_1^2=e^4-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{4}+\frac{e^2}{4}=\frac{3e^4-e^2}{4}$$

Στέλιος Μιχαήλογλου