ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h \neq 0$, ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=\eta\mu x\cdot\frac{(\sigma\upsilon\nu h-1)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0$, είναι $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x$,

δηλαδή $(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$.

Α.2. Η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της, όταν είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) και επιπλέον ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha^+}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-}\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in\mathbb{R}$.

Α.3. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ ολικό μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x\in A$.

Α.4. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1. Οι z_1,z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $z^2-Sz+P=0$, όπου $S=z_1+z_2=-2$ και $P=z_1z_2=5$, άρα η εξίσωση είναι η $z^2+2z+5=0$, έχει $\Delta=-16$ και $z_1=-1+2i,\ z_2=-1-2i$.

Β.2. Εστω $w=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$, τότε:

$$|w-z_1|^2+|w-z_2|^2=|z_1-z_2|^2\Leftrightarrow|x+yi+1-2i|^2+|x+yi+1+2i|^2=|-1+2i+1+2i|^2\Leftrightarrow$$

$$\left(\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}\right)^2+\left(\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}\right)^2=16\Leftrightarrow$$

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4+x^2+2x+1+y^2+4y+4=16\Leftrightarrow$$

$$2x^2+4x+2y^2=6\Leftrightarrow x^2+2x+y^2=3\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2=4\Leftrightarrow(x+1)^2+y^2=4\ (1).$$

Β.3. Είναι $2\cdot\mathrm{Re}(w)+\mathrm{Im}(w)=0\Leftrightarrow 2x+y=0\Leftrightarrow y=-2x$. Άρα

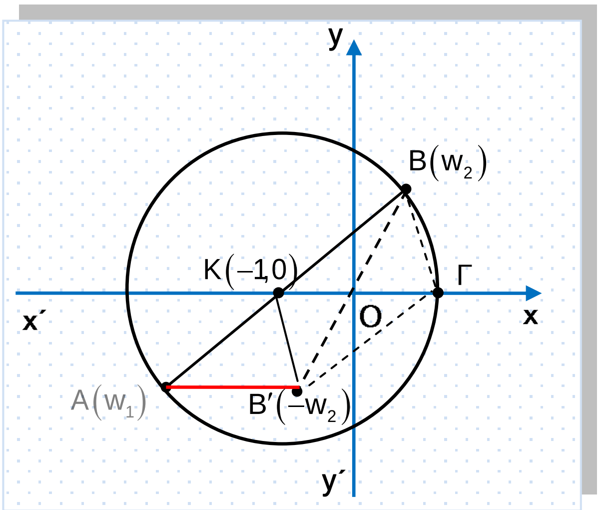
$$\begin{cases}(x+1)^2+y^2=4\\ y=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+1+4x^2=4\\ y=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2+2x-3=0\\ y=-2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1 \text{ ή } x=\frac{3}{5}\\ y=-2x\end{cases}$$

Για $x=-1$ είναι $y=2$ και $w=-1+2i$, ενώ αν $x=\frac{3}{5}$, τότε $y=-\frac{6}{5}$ και $w=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$.

Β.4. Εστω Α,Β οι εικόνες των w_1,w_2 αντίστοιχα. Τότε $|w_1-w_2|=4\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|=2\rho$, οπότε τα Α,Β είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου της (1). Αν Β΄ είναι η εικόνα του $-w_2$, τότε

$|w_1+w_2|=2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB'}|=2$.

Το τετράπλευρο ΒΚΒ΄Γ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιες του διχοτομούνται.
Άρα $B'\Gamma =\parallel KB$. Άρα και τα Β΄Γ και ΚΑ είναι ίσα και παράλληλα, οπότε και το τετράπλευρο ΚΑΒ΄Γ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AB'=K\Gamma=2$.
Δηλαδή $|\overrightarrow{AB'}|=2$.



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left((x-2)\ln x+x-3\right)=+\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)=+\infty$, οπότε η f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x-2)\ln x}{x}+1-\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\ln x+1-\dfrac{3}{x}\right)=+\infty$, γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x}=0$.

Άρα η f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη.

Είναι $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0}\left((x-2)\ln x+x-3\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0}(x-2)=-2$, $\lim\limits_{x\to+}\ln x=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0}(x-3)=-3$,
άρα η $x=0$, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Γ.2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1=\ln x+\dfrac{2x-2}{x}$.

Για κάθε $x>1$είναι $\ln x>0$ και $2x-2>0$, άρα $f'(x)>0$και f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Για κάθε $0<x<1$ είναι $\ln x<0$ και $2x-2<0$, άρα $f'(x)<0$και f γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Γ.3. Για το διάστημα $\Delta_1=(0,1]$, το σύνολο τιμών της f είναι: $f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0}f(x)\right)=[-2,+\infty)$.

Επειδή το 0 ανήκει στο $f(\Delta_1)$, υπάρχει $x_1\in\Delta_1$τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ_1,το x_1είναι μοναδικό.

Για το διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$, το σύνολο τιμών της f είναι: $f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=[-2,+\infty)$.

Επειδή το 0 ανήκει στο $f(\Delta_2)$, υπάρχει $x_2\in\Delta_2$τέτοιο, ώστε $f(x_2)=0$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_2,το x_2είναι μοναδικό. Οπότε η $f(x)=0$έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ.4. Επειδή τα x_1,x_2 είναι ρίζες της f, ισχύει ότι $f(x_1)=f(x_2)=0$.

Εστω $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[x_1,x_2]$.

Η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με

$h'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Επειδή $h(x_1)=\dfrac{f(x_1)}{x_1}=0$, $h(x_2)=\dfrac{f(x_2)}{x_2}=0$, δηλαδή $h(x_1)=h(x_2)$, λόγω του

θεωρήματος Rolle υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε: $h'(\xi)=0\Leftrightarrow\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-f(\xi)=0$.

Εστω τώρα η συνάρτηση $\varphi(x)=xf'(x)-f(x)$, $x>0$.

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$με

$\varphi'(x)=f'(x)-xf''(x)-f'(x)=-xf''(x)=-x\left(\ln x+\dfrac{x-2}{x}+1\right)'=-x\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)<0$ για κάθε $x>0$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε το ξ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(x)=0$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ έχει εξίσωση: $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$.

Για να διέρχεται η εφαπτομένη από την αρχή Ο των αξόνων , πρέπει:
$0-f(\xi)=f'(\xi)(0-\xi)\Leftrightarrow \xi f'(\xi)-f(\xi)=0$ που ισχύει.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1. Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)>f'(0)=0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Για κάθε $x<0$ είναι $f'(x)<f'(0)=0$ άρα f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x=0$, άρα $f(x)\geq f(0)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ.2. Έστω $xt=u$, τότε $xdt=du$ και για $t=0$ είναι $u=0$, ενώ για $t=1$ είναι $u=x$. Οπότε:
$x\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^1 f(xt)xdt=\int_0^u f(u)du$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^1 f(xt)dt+x^3}{\eta\mu^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du+x^3}{\eta\mu^3 x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+3x^2}{3\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\dfrac{1}{x^2}+3}{2\left(\dfrac{\eta\mu x}{x}\right)^2\cdot\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$, γιατί

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu x=1$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Δ.3. $f'(x)+2x=2x\cdot\left(f(x)+x^2\right)\Leftrightarrow f'(x)-2xf(x)=2x^3-2x\Leftrightarrow e^{-x^2}f'(x)-2xe^{-x^2}f(x)=2x^3e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\Leftrightarrow$

$\left(e^{-x^2}f(x)\right)'=2x^3e^{-x^2}-2xe^{-x^2}\Leftrightarrow e^{-x^2}f(x)=\int 2x^3e^{-x^2}-2xe^{-x^2}dx\Leftrightarrow$

$e^{-x^2}f(x)=\int 2x^3e^{-x^2}dx-\int 2xe^{-x^2}dx$ (1)

Είναι $\int 2x^3e^{-x^2}dx\overset{-x^2=u}{\underset{-2xdx=du}{=}}-\int ue^u du=\int u\left(e^u\right)'du=ue^u-\int e^u du=-x^2e^{-x^2}-e^u=-x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}$, άρα η (1) γίνεται: $e^{-x^2}f(x)=-x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+e^{-x^2}+c\Leftrightarrow f(x)=-x^2+ce^{x^2}$.

Είναι $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$, άρα $f(x)=-x^2+e^{x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ.4. Είναι $h(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt=\int_x^0 f(t)dt+\int_0^{x+2}f(t)dt=\int_0^{x+2}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ οι συναρτήσεις $\int_0^{x+2}f(t)dt$, $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες, άρα η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=f(x+2)-f(x)$.

Είναι $x<x+2$, $x>0$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα $f(x)<f(x+2)\Leftrightarrow h'(x)>0$ και h γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Είναι $\displaystyle\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3}f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0\Leftrightarrow\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+1+2}f(t)dt<\int_4^6 f(t)dt\Leftrightarrow h\left(x^2+2x+1\right)<h(4)\Leftrightarrow$

$x^2+2x+1<4\Leftrightarrow x^2+2x-3<0\Leftrightarrow(x-1)(x+3)<0\Leftrightarrow x\in(-3,1)$

Στέλιος Μιχαήλογλου