Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021

5ο Διαγώνισμα

29-3-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

μονάδες 7

Α2. Πότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη, τότε οι συναρτήσεις $f^{-1}\circ f$ και $f\circ f^{-1}$ είναι ίσες».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)<0$ και υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)=0$, τότε κατ' ανάγκη $f(\beta)>0$.

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

μονάδες 6

Α5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x^3-x^2-2x}{x^3-x}$ δεν υπάρχει, τότε:

Α. $x_0=0$ Β. $x_0=2$ Γ. $x_0=-1$ Δ. $x_0=1$

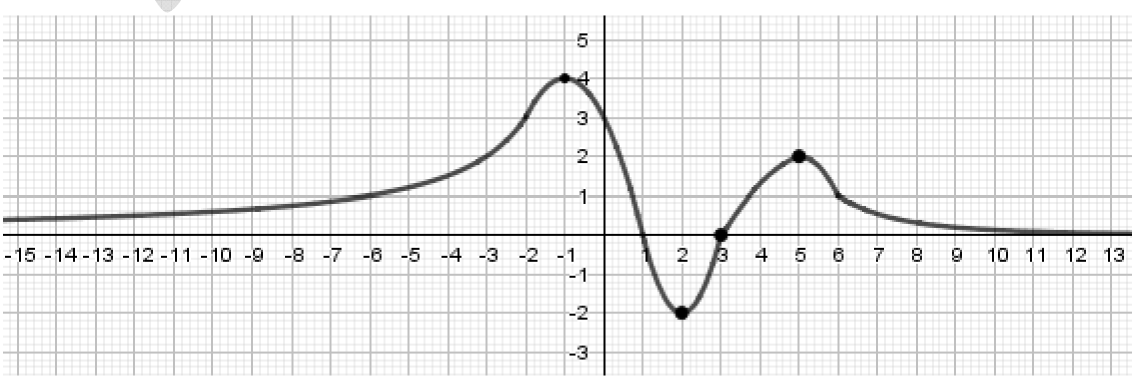
β) Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$ και $f(0)=0$, τότε:

Α. $f(1)=-1$ Β. $f(-1)>0$ Γ. $f(1)>0$ Δ. $f(-1)=0$

μονάδες 4

Θέμα Β

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f ΄ μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και οι τιμές $f(-1)=1,\ f(1)=4,\ f(2)=0,\ f(3)=-2,\ f(5)=1$.



Β1. Να μελετήσετε τη f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

μονάδες 4

Β2. Να μελετήσετε τη f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 4

Έστω επιπλέον ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x+2\right)=0$.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

μονάδες 3

Β4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών τη f.

μονάδες 5

Β5. Να σχεδιάσετε την C_f με βάση τα παραπάνω δεδομένα.

μονάδες 4

Β6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\cdot f'(x)+f(x)=3f'(x)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(1,+\infty)$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η ορισμένη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f με σύνολο τιμών το $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- Η f αντιστρέφεται και έχει ως αντίστροφη την f^{-1} .
- Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού τους και ισχύει η σχέση:

$$f(x)-\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{x^2}-f^{-1}(x) \text{ για κάθε } x\in D_f\cap D_{f^{-1}} .$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f και η f^{-1} έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας.

μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

μονάδες 6

Γ3. Για κάθε $x\in\left(\frac{1}{\pi},\frac{2}{\pi}\right)$, να αποδείξετε ότι:

α) ορίζεται το $A=f\left[x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right]+f^{-1}\left[x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

β) η ανίσωση $\dfrac{1}{x^2\eta\mu^2\left(\frac{1}{x}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{x\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}}<2$ δεν έχει λύση.

μονάδες 2+6

Γ4. Έστω η ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να αποδείξετε ότι:

α) η συμμετρική ευθεία της $y=\alpha$ ως προς την ευθεία $y=x$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$.

β) αν η f είναι συνεχής τότε α = 0.

μονάδες 3+3

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)=3x^2e^{|x|^3}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

Δ1. Να βρείτε το σύνολο των συναρτήσεων f που ικανοποιούν την (1).

μονάδες 8

Δ2. Αν το γινόμενο $f(-2)\cdot f(2)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή του να βρείτε τον τύπο της f.

μονάδες 3

Δ3. Έστω $f(x)=\begin{cases} e^{x^3}-1 & , x\geq 0 \\ -e^{-x^3}+1 & , x<0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 0 διαπερνά την καμπύλη της f.

μονάδες 5

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, e-1)$ και να αποδείξετε ότι έχει κι άλλο κοινό σημείο με την C_f στο οποίο όμως δεν είναι εφαπτομένη.

μονάδες 9

Καλή Τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

Α1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ (1)

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi) = 0$,οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι. $f(x_1) = f(x_2)$.Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0. Αν

- η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β), ή αντιστρόφως, και
- η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, τότε

το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ ονομάζεται σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Α3. α) Ψευδής

β) Είναι $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in A$ και $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε $x \in f(A)$.
Για παράδειγμα, έστω η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$. Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση αυτή είναι $1-1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f. Η συνάρτηση αυτή, σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως,

– έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$
– έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και
– αντιστοιχίζει κάθε $y \in (0, +\infty)$ στο μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\alpha^x = y$. Επειδή όμως

$$\alpha^x = y \Leftrightarrow x = \log_\alpha y$$

θα είναι $f^{-1}(y) = \log_\alpha y$. Επομένως, η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$, είναι η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \log_\alpha x$. Συνεπώς $\log_\alpha \alpha^x = x,\ x \in \mathbb{R}$ και $\alpha^{\log_\alpha x} = x,\ x \in (0, +\infty)$

Α4. α) Λ β) Λ γ) Σ **Α5.** α) Δ β) Γ

Θέμα Β

Β1. Για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.
Για κάθε $x \in (1, 3)$ είναι $f'(x) < 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.
Η f έχει τοπικό μέγιστο το $f(1) = 4$, τοπικό ελάχιστο το $f(3) = -2$.

Β2. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$, $[2, 5]$, οπότε η f είναι κυρτή στα διαστήματα αυτά.
Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-1, 2]$, $[5, +\infty)$, οπότε η f είναι κοίλη στα διαστήματα αυτά.

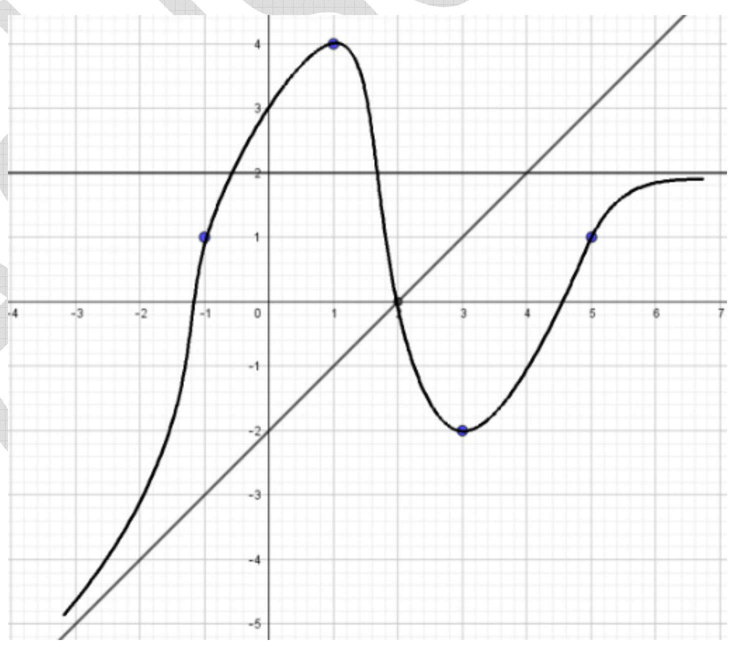
Η f έχει σημεία καμπής τα $\left(-1,f\left(-1\right)\right)\equiv\left(-1,1\right)$, $\left(2,f\left(2\right)\right)\equiv\left(2,0\right)$ και $\left(5,f\left(5\right)\right)\equiv\left(5,1\right)$.

B3. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=2$, η ευθεία y = 2 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-x+2\right)=0$, η ευθεία $y=x-2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

B4. Έστω $f\left(x\right)-x+2=h\left(x\right)\Leftrightarrow f\left(x\right)=h\left(x\right)+x-2$ με $\lim\limits_{x\to-\infty} h\left(x\right)=0$.
Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(h\left(x\right)+x-2\right)=-\infty$.
Στο διάστημα $\Delta_1=\left(-\infty,1\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f\left(\Delta_1\right)=\left(-\infty,1\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f\left(\Delta_1\right)$, η f έχει ακριβώς μια ρίζα x_1 στο Δ_1.
Στο διάστημα $\Delta_2=\left(1,3\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f\left(\Delta_2\right)=\left(-2,4\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f\left(\Delta_2\right)$, η f έχει ακριβώς μια ρίζα x_2 στο Δ_2.
Στο διάστημα $\Delta_3=\left(3,+\infty\right)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f\left(\Delta_3\right)=\left(-2,2\right)$. Επειδή το 0 περιέχεται στο $f\left(\Delta_3\right)$, η f έχει ακριβώς μία ρίζα x_3 στο Δ_3.
Τελικά η f έχει τρείς ρίζες.

B5.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	1	2	3	5	$+\infty$
f'	+ ↗	+ ↘	− ↘	− ↗	+ ↗	+ ↘
f	↗	↗	↘	↘	↗	↗



B6. $xf'\left(x\right)+f\left(x\right)=3f'\left(x\right)\Leftrightarrow xf'\left(x\right)-3f'\left(x\right)+f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-3\right)f'\left(x\right)+f\left(x\right)=0$
Έστω η συνάρτηση $g\left(x\right)=\left(x-3\right)f\left(x\right),\ x\geq1$.
Είναι $g\left(2\right)=-f\left(2\right)=0,\ g\left(3\right)=0$ και $g\left(x_3\right)=\left(x_3-3\right)f\left(x_3\right)=0$.
Είναι $g\left(2\right)=g\left(3\right)=g\left(x_3\right)$ και η g είναι συνεχής στα $\left[2,3\right],\left[3,x_3\right]$ και παραγωγίσιμη στα $\left(2,3\right),\left(3,x_3\right)$,

με $g'(x)=(x-3)f'(x)+f(x)$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, η εξίσωση $g'(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(2,3)$, $(3,x_3)$, δηλαδή έχει τουλάχιστον ρίζες στο $(1,+\infty)$.

Θέμα Γ

Γ1. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και η f^{-1} με πεδίο ορισμού το $f((0,+\infty))=(0,+\infty)$ δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ τότε για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ισχύει:

$$f^{-1}(x_1)\geq f^{-1}(x_2)\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f\left(f^{-1}(x_1)\right)\geq f\left(f^{-1}(x_2)\right)\Rightarrow x_1\geq x_2 \text{ Άτοπο}$$

Άρα η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Ομοίως αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Γ2. $f(x)-\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{x^2}-f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)+f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}$ για κάθε $x\in Df\cap Df^{-1}=(0,+\infty)$

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)+f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x>0$

Η g είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $(0,+\infty)$ με παράγωγο:

$g'(x)=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{x}=-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}<0$ άρα $g\searrow(0,+\infty)$.

Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα.

Για κάθε $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2 \overset{f,f^{-1}\nearrow}{\Rightarrow}\begin{cases}f(x_1)<f(x_2) & (1)\\ f^{-1}(x_1)<f^{-1}(x_1) & (2)\end{cases}\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}$

$\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow} g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow g\nearrow(0,+\infty)$.

Το οποίο είναι άτοπο .

Άρα θα είναι γνησίως φθίνουσες.

Γ3. α) Είναι $x\in\left(\dfrac{1}{\pi},\dfrac{2}{\pi}\right)$ άρα $\dfrac{1}{\pi}<x<\dfrac{2}{\pi}\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{1}{x}<\pi\Rightarrow ημ\left(\dfrac{1}{x}\right)>0\overset{x>0}{\Rightarrow}xημ\left(\dfrac{1}{x}\right)>0$

Άρα ορίζεται το $A=f\left(xημ\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)+f^{-1}\left(xημ\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)=g\left(xημ\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

β) Είναι $\dfrac{1}{x^2ημ^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}+\dfrac{1}{\sqrt{xημ\left(\dfrac{1}{x}\right)}}<2\Leftrightarrow g\left[xημ\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]<g(1)\overset{g\searrow}{\Leftrightarrow}xημ\left(\dfrac{1}{x}\right)>1$ δεν έχει λύση γιατί:

Είναι $|ημx|\leq|x|$ με την ισότητα να ισχύει μόνον για $x=0$ και για $x>0$ είναι $|ημx|<x\Leftrightarrow -x<ημx<x$.

Σύμφωνα με την παραπάνω βασική ανισότητα αν θέσουμε για x το $\dfrac{1}{x}>0$ είναι:

$-\dfrac{1}{x}<ημ\left(\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}\overset{x>0}{\Rightarrow}x\cdot ημ\left(\dfrac{1}{x}\right)<1$ για κάθε $x>0$.

Γ4. α) Αφού η ευθεία $y=α, α\in\mathbb{R}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=α$$

Ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$ οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(f(x))=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ **(3)**

Επίσης έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(f(x)) \overset{f(x)=u,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\alpha}{\underset{u\to\alpha}{=}} \lim\limits_{u\to\alpha} f^{-1}(u)$ δηλαδή ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(f(x))=\lim_{x\to\alpha} f^{-1}(x)$$

Άρα από την (3) έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} f^{-1}(x)=+\infty$ οπότε η ευθεία $x=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{f^{-1}}$ και η συγκεκριμένη ευθεία είναι συμμετρική της $y=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$ ως προς την ευθεία $y=x$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα έχει σύνολο τιμών το $f((0,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)$. Όμως το σύνολο τιμών της f είναι το $(0,+\infty)$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ οπότε $\alpha=0$.

Θέμα Δ

Δ1. Για $x\ge 0$ $f'(x)=3x^2e^{x^3} \Leftrightarrow f'(x)=\left(e^{x^3}\right)'$ άρα υπάρχει $c_1\in\mathbb{R}$,τέτοιο ώστε $f(x)=e^{x^3}+c_1$.

Για $x<0$ $f'(x)=3x^2e^{-x^3} \Leftrightarrow f'(x)=\left(-e^{-x^3}\right)'$ άρα υπάρχει $c_2\in\mathbb{R}$,τέτοιο ώστε $f(x)=-e^{x^3}+c_2$.

Η f είναι συνεχής στο 0 ως παραγωγίσιμη ,άρα

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Leftrightarrow 1+c_1=-1+c_2 \Leftrightarrow c_2=c_1+2$.οπότε $f(x)=\begin{cases} e^{x^3}+c & , x\ge 0 \\ -e^{-x^3}+c+2 & , x<0 \end{cases}$

$(c=c_1)$

Δ2. $f(-2)\cdot f(2)=\left(-e^8+c+2\right)\left(e^8+c\right)=-e^{16}-e^8c+e^8c+c^2+2e^8+2c=c^2+2c+2e^8-e^{16}$.

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=x^2+2x+2e^8-e^{16}$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι $g'(x)=2x+2$

Για κάθε $x<-1$ είναι $g'(x)<0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,1]$.

Για κάθε $x>-1$ είναι $g'(x)>0$ και επειδή η g είναι συνεχής, είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Η g έχει ελάχιστο για $x=-1$, άρα $f(x)=\begin{cases} e^{x^3}-1 & , x\ge 0 \\ -e^{-x^3}+1 & , x<0 \end{cases}$.

Δ3. α. $f'(x)=3x^2e^{|x|^3}=\begin{cases} 3x^2e^{-x^3} & , x<0 \\ 0 & , x=0 \\ 3x^2e^{x^3} & , x>0 \end{cases}$.

Για x<0 $f''(x)=\left(3x^2e^{-x^3}\right)'=3xe^{-x^3}\left(2-3x^3\right)<0$

Για x>0 $f''(x)=\left(3x^2e^{x^3}\right)'=3xe^{x^3}\left(2+3x^3\right)>0$

Για x=0 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2e^{-x^3}}{x}\lim\limits_{x\to 0^-}3xe^{-x^3}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{3x^2e^{x^3}}{x}\lim\limits_{x\to 0^0}3xe^{x^3}=0$

Άρα f΄΄(0)=0. Τελικά η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και έχει σημείο καμπής το O(0,0), οπότε στο σημείο αυτό η εφαπτομένη διαπερνά την C_f.

β) ε: $y-f(1)=f'(1)(x-1) \Leftrightarrow \varepsilon: y=3ex-2e+1$.

Η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$, άρα η C_f δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την ε για $x\ge 0$.

Για x<0 Έχουμε την εξίσωση $f(x)=3ex-2e+1 \Leftrightarrow -e^{-x^3}+1=3ex-2e+1 \Leftrightarrow -e^{-x^3}-3ex+2e=0$

Θεωρούμε $g(x)=-e^{-x^3}-3ex+2e$, $x<0$

$g'(x)=3x^2e^{-x^3}-3e$, $g'(-1)=0$ και $g''(x)=\left(3x^2e^{-x^3}\right)'=3xe^{-x^3}\left(2-3x^3\right)<0$, άρα g΄ γνησίως φθίνουσα.

$g'(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>g'(-1) \overset{g'\searrow}{\Leftrightarrow} x<-1$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0)$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$, άρα $g(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),g(-1)\right]=(-\infty,4e]$

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{-x^3}-3ex+2e\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot\left(-\dfrac{e^{-x^3}}{x}-3e+\cancel{\dfrac{2e}{x}}^{0}\right)=-\infty\cdot(+\infty-3e)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x^3}}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-3x^2\cdot e^{-x^3}\right)=-3\cdot(+\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$.

Το $0\in g(\Delta_1)$ και g γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$, άρα υπάσχει μοναδικό $x_0\in(-\infty,-1)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

Η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=(-1,0)$, άρα

$g(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to0^-}g(x),\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)\right)=(2e-1,4e)$.

Το $0\notin g(\Delta_2)$ άρα $g(x)\neq0$ για κάθε $x\in\Delta_2$.

Τελικά η ε τέμνει την C_f σε ένα ακόμη σημείο με τετμημένη $x_0\in(-\infty,-1)$.

Για να εφάπτεται η ε στην C_f στο σημείο της $(x_0,f(x_0))$ πρέπει επιπλέον $f'(x_0)=3e$.

Παρατηρούμε ότι $f'(-1)=3e$ και για x<0 $f''(x)=\left(3x^2e^{-x^3}\right)'=3xe^{-x^3}\left(2-3x^3\right)<0$, άρα f' γνησίως φθίνουσα οπότε $x_0=-1$ μοναδική λύση της εξίσωσης $f'(x)=3e$ που είναι μη αποδεκτή γιατί $x_0\in(-\infty,-1)$.