4.3. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Αν η εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots+\alpha_1 x+\alpha_0=0$ με $\alpha_\nu,\alpha_{\nu-1},\ldots,\alpha_1,\alpha_0\in\mathbf{Z}$:

- έχει ρίζα τον ακέραιο αριθμό ρ, τότε το ρ διαιρεί το α_0.
- έχει ρίζα το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$, τότε το κ διαιρεί το α_0 και το λ διαιρεί το α_ν.

Αν $P(x)$ πολυώνυμο και $\alpha,\beta\in R$ έτσι ώστε $P(\alpha)\cdot P(\beta)<0$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $P(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ΟΜΑΔΑ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x^4+5x^3+6x^2=0$ ii) $3x^4-8x^3-12x^2+32x=0$

iii) $2x^2-8+(x-2)(2x+1)=x^2-5x+6$ iv) $x^3+2x^2-6x-27=0$

v) $(x+1)^2(2x-3)-(x^2-1)^2=0$ vi) $(x+3)^3-27=0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $x^3-x^2-10x-8=0$ ii) $x^4+3x^3+x^2-3x-2=0$

iii) $4x^3-8x^2+x+3=0$ iv) $6x^4-7x^3-12x^2+3x+2=0$

v) $x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{17}{6}=0$

3. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων

$f(x)=x^4-4x^3+10x^2+20x-10$ και $g(x)=5x^3-8x^2+2x+30$.

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4+x^3-2x^2-3x-3=0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

5. Να βρείτε το κ, ώστε η εξίσωση $x^6-3x^4-6x^2+\kappa=0$ να έχει ρίζα το 2. Στη συνέχεια λύσετε την εξίσωση.

6. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$P(\chi)=(x-x^2)(x^2+5x+6)(x^2+4)$.

7. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$P(\chi)=(x+2)(3-2x-x^2)(x^2-5x+8)$.

askisopolis

8. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

i. $(5x-10)(x+3)(x^2+9x+20)<0$ ii. $(10-x^2-3x)(x^2-2x+1)>0$

iii. $(1-x)^2(x^2-8x+16)\le 0$ iv. $(x^2-4x+6)(4x+5-x^2)\ge 0$

v. $(3x^2-2x+1)(-x^2+6x-9)\ge 0$ vi. $4(1-x^2)(x^2+x)(x^2+2x-3)\ge 0$

9. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^4-x^3+3x^2-3x\ge 0$ ii) $x^3+3x^2-x-3<0$

iii) $x^3-4x^2+2x-8>0$ iv) $x^4-5x^2+6\le 0$

10. Να λύσετε τις ανισώσεις :

i) $x^3-5x^2+8x-4 > 0$

ii) $x^4+2x^3 \ge 7x^2+20x+12$

iii) $x^4+3x^2+x < 5x^3$

11. Δύο ρίζες της εξίσωσης: $x^4-(2\alpha+1)x^3+5x^2+(\beta-2)x-6=0$

είναι οι $x = 1$ και $x = 2$. Να βρείτε:

i) τις τιμές των α και β,

ii) τις άλλες ρίζες της εξίσωσης.

12. Η εξίσωση $x^3+\alpha x^2+\beta x+2 = 0$ να έχει διπλή ρίζα το 1.

Να βρείτε:

i) τις τιμές των α και β,

ii) την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

13. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x)=x^4-x^3-x^2-x-2, x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι το $x+1$ είναι παράγοντας του $f(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του $f(x)$ με το $(x+1)$.

Β. Να αποδείξετε ότι το $x-2$ είναι παράγοντας του $\pi(x)$ και να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ της διαίρεσης του του $\pi(x)$ με το $(x-2)$.

Γ. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. (Σεπτ. 2001)

askisopolis

Β΄ΟΜΑΔΑ

14. Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x) = x^4 – 3x^3 – 3x^2 + 8x + 4 \text{ και } \delta(x) = x^2 – 2x - 3$$

α) Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το πολυώνυμο δ(x).

β) Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης P(x) : δ(x).

γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq x – 2$.

15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 – 18x + \beta – 1$ το οποίο έχει παράγοντα το πολυώνυμο $Q(x) = x^2 + 2x + 1$.

α) Να βρεθούν οι τιμές των α και β.

β) Να βρεθούν όλες οι ρίζες του P(x).

γ) Να γίνει γινόμενο το πολυώνυμο P(x).

δ) Να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η πολυωνυμική συνάρτηση P(x) έχει τη γραφική της παράσταση κάτω από τον άξονα x΄x.

16. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x - 2$$

Αν το $x = -1$ είναι ρίζα με πολλαπλότητα 3:

i) να βρείτε τις τιμές των α, β και γ,

ii) να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

17. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 – 2x^3 – 4x^2 + 2x + 3$$

i) Να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης του P(x) με το $x^2 – 4$.

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της προηγούμενης διαίρεσης, χωρίς να γίνει η διαίρεση.

iii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

iv) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

18. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$P(x) = x^4 – 4x^3 – x^2 + 16x - \lambda$$

το οποίο διαιρείται με $x – 1$.

i) Να βρείτε την τιμή του λ.

ii) Να βρείτε τις πιθανές ακέραιες ρίζες του P(x).

iii) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

askisopolis

iv) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

19. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda x^3+x^2-(\lambda+5)x+4,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Αν το $P(x)$ έχει ρίζα για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ, τότε:

α) να βρείτε τη ρίζα.

β) να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του.

γ) Αν $\lambda=1$, να λύσετε την εξίσωση $\left(P(x)-x^3\right)^2+6P(x)=6x^3-5$.

20. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \lambda x^3 + 2\lambda^3x^2 - \lambda^2x - 2$$

Αν η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A(1, 0), τότε να βρείτε:

i) την τιμή του λ,

ii) όλα τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα x΄x,

iii) τα διαστήματα, στα οποία η C_f είναι πάνω από τον άξονα x΄x.

21. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+(x+1)^2$ δεν έχει κανένα σημείο κάτω από τον x΄x.

22. Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $24x^4+4x^3+15 = 66x^2+x$ ii) $3x^3+13x^2+10x+2 = 0$

23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $3\left(\frac{x+1}{x}\right)^2-10\left(\frac{x+1}{x}\right)+3=0$ ii) $(x^2+x+2).(x^2+x+1)=12$

iii) $(x^2-2x-5)^2-2(x^2-2x-3)=4$ iv) $(x+2)(x-1)(x-3)(x-6)+56=0$

24. Έστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το x^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

A. Να αποδείξετε ότι $P(x)= x^3 + x$

B. Να λύσετε την ανίσωση $\left(P(x)-2\right)^3+\left(P(x)-2\right)^2+P(x)>2$

(Σεπτ. 2003)

25. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-8x^3+(5\alpha-1)x^2+8x-3\alpha-6,\alpha\in\mathbb{R}$

A. . Να γίνει η διαίρεση του P(x) δια του x^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

B. Να βρείτε τη τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

askisopolis

Γ. Για α=3, να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης P(x) = 0 καθώς και τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) είναι κάτω από τον άξονα x΄x. (Μάιος 2004)

26. Να λύσετε την ανίσωση $-t^4+2t^3+2t^2+2t+3\geq 0, t\in\mathbb{R}$.

ii) Ένα παιδάκι τη χρονική στιγμή t=0 min αρχίζει να φουσκώνει ένα μπαλόνι, το οποίο όμως εχει λίγο αέρα. Στη συνέχεια το μπαλόνι χάνει αέρα, έως ότου ξεφουσκώσει τελείως τη χρονική στιγμή $t_1>0$. Αν ο όγκος του αέρα του μπαλονιού συμβολίζεται με V(t), μετριέται σε λίτρα και δίνεται από την συνάρτηση

V(t)= $-t^4+2t^3+2t^2+2t+3\geq 0, (t..\min), t\in[0,t_1]$,να βρείτε:

τον όγκο του αέρα που υπήρχε στο μπαλόνι αρχικά και τη χρονική στιγμή t_1,στην οποία το μπαλόνι ξεφουσκώνει τελείως.

27. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + x + 1$. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:

$$Q(x) = f(f(x)) - f(x) - 2$$

διαιρείται με το πολυώνυμο $R(x) = f(x) - 1$.

28. Δίνεται το πολυώνυμο:

$$f(x) = \alpha x^{2015} + \beta x^{2014} - \gamma x - \delta$$

Αν το f(x) διαιρείται με $\alpha x + \beta$, να αποδείξετε ότι το f(x) διαιρείται και με $\gamma x + \delta$.

askisopolis