Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis

Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας

2020 - 2021


Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

1ο Διαγώνισμα

23-2-2021

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν για μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq m$ για κάθε $x\in A$, τότε η f έχει ελάχιστο το m».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, η οποία έχει ρίζα στο ανοικτό διάστημα (α,β), ισχύει $f(\alpha)f(\beta)<0$

β) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)f(\beta)=-2021$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(\alpha,x_0]$ και κοίλη στο $[x_0,\beta)$ τότε το $(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της.

δ) Κάθε κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f.

ε) Αν μια μη σταθερή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει ακρότατο στο α και είναι παραγωγίσιμη στο α, τότε $f'(\alpha)=0$.

μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\ln x,\ x>0$ και $h(x)=\ln x-x,\ x>0$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $(f\circ g)(x)=-h(x)$.

μονάδες 5

Β2. Να μελετήσετε τις f, h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)>h(x)$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 5

Β3. Να βρείτε ένα σημείο της C_f και ένα σημείο της C_h στο οποίο οι εφαπτομένες τους να είναι παράλληλες.

μονάδες 5

Β4. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Α(1,0) εφάπτεται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h.

μονάδες 5

Β5. Να αποδείξετε ότι $g(x)+h(x)<0$ για κάθε $x>0$.

μονάδες 5

Θέμα Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $x^2(f'(x)-1)=2\ln x-1$ και

- $f(1)=0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^2-2\ln x-1}{x}, x>0$.

μονάδες 5

Γ2. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα .

μονάδες 5

Γ3. Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f.

μονάδες 5

Γ5. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της f.

μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}+f(x)-1}{x}=0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f έχει κρίσιμο σημείο το x = 0.

μονάδες 7

Έστω τώρα ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)<f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)\le f(x)$ για κάθε $x\ge 0$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x<0$.

μονάδες 4

Δ3. Να βρείτε το πρόσημο της f.

μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$.

μονάδες 4

Δ5. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημείο καμπής το $O(0,0)$.

μονάδες 5

Καλή Τύχη!