

**Επαναληπτικά Διαγωνίσματα
στα Μαθηματικά προσανατολισμού
της Γ΄ Λυκείου
από το Askisopolis
2023 - 2024**



**Αντώνης Βαλέργας
Στέλιος Μιχαήλογλου
Θανάσης Νικολόπουλος
Βαγγέλης Ραμαντάνης
Βαγγέλης Τόλης
Ισαάκ Χιονίδης**

**Αποστόλης Κακαβάς
Άγγελος Μπλιάς
Δημήτρης Πατσιμάς
Νίκος Σαμπάνης
Νίκος Τούντας**



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

Μαθηματικά προσανατολισμού Γ' Λυκείου
2ο Διαγώνισμα
Ύλη: 1ο Κεφάλαιο

28 -10-2023

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , είναι 1-1 αν και μόνον αν για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$.

β) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ τότε κατ' ανάγκη ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(f(x)) = f(\alpha)$.

γ) Αν $f(x) \geq m$ για κάθε $x \in D_f$ τότε η f έχει ελάχιστο το m .

μονάδες 6

A5. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνεχής συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση δεν τέμνει τον άξονα $x'x$, δεν μπορεί να παίρνει ετερόσημες τιμές.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \eta \mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να υπολογίσετε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - f(x))}{x^2 + 4x + 5}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{xe^x}$

μονάδες 12

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} - \frac{\sigma \cup \nu x}{x - \pi} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, \pi)$.

μονάδες 5

B3. Να αποδείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

μονάδες 4

B4. Να εξετάσετε αν η f έχει ελάχιστο το 0.

μονάδες 4

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^x - 2^x - x + 1, & x > 0 \\ \ln(-x+1) - e^x + \kappa, & x \leq 0 \end{cases}$ για την οποία ισχύει

το θεώρημα Bolzano στο $[-1,1]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

μονάδες 3

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση x_0 με $x_0 > 0$.

μονάδες 4

Γ4. Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f\left(\frac{1}{x-x_0}\right)}{f(x)}$.

μονάδες 6

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $3^{-|x+1|} + 3 < 2^{|x+1|} + |x+1| + \frac{1}{3}$.

μονάδες 4

Θέμα Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για όλα τα $\kappa, \lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει

$$(f(\sin \kappa) + f(\sin \lambda))^2 = (e^{\sin \kappa} + e^{\sin \lambda} - \sin \kappa - \sin \lambda - 2)^2 \quad (1)$$

Δ1. Να βρείτε τη συνάρτηση $(f(x))^2$.

μονάδες 5

Δ2. Αν γνωρίζετε ότι η εξίσωση $e^x = x + 1$ έχει μοναδική λύση την $x = 0$, να αποδείξετε είτε αλγεβρικά είτε γραφικά, ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$.

μονάδες 5

Δ3. Αν $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - \frac{3}{2}$ και $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in (-1,1)$.

μονάδες 6

Δ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x + \sigma \nu x}{f(x)}$.

μονάδες 5

Δ5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα

$$\left[-\frac{999}{1000}, \frac{999}{1000}\right] \text{ και να βρεθεί η θέση ελάχιστης τιμής καθώς και η ελάχιστη τιμή της } f.$$

μονάδες 5

Καλή τύχη!

Λύσεις

Θέμα Α

A1. Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

A2. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

A3. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell, \text{ τότε και } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

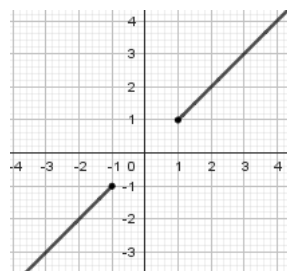
A4. α) Λ β) Λ γ) Λ

A5. α) Ψ

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in A = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν τέμνει τον άξονα x' αφού

$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, όμως η f παίρνει ετερόσημες τιμές.



Θέμα Β

B1. α) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \eta \mu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} - \frac{\eta \mu x}{x} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} - \frac{\eta \mu x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} - \eta \mu x \right) = 0 - 1 = -1$$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{x^2 + 1} - f(x))}{x^2 + 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \eta \mu x}{x^2 + 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4x + 5} \eta \mu x \right) = 0$ γιατί

$$\left| \frac{x}{x^2 + 4x + 5} \eta \mu x \right| \leq \left| \frac{x}{x^2 + 4x + 5} \right| \Leftrightarrow - \left| \frac{x}{x^2 + 4x + 5} \right| \leq \frac{x}{x^2 + 4x + 5} \eta \mu x \leq \left| \frac{x}{x^2 + 4x + 5} \right|$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 4x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 4x + 5} \eta \mu x \right) = 0$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \eta\mu x}{xe^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} \right) e^{-x} \right] = -\infty \text{ γιατί}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1$
- $\left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right)$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$

B2. Η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x-\pi} = 0$ στο $(0, \pi)$ ισοδύναμα γίνεται $f(x)(x-\pi) - x\sigma\upsilon\nu x = 0$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = f(x)(x-\pi) - x\sigma\upsilon\nu x$, $x \in [0, \pi]$ η οποία είναι συνεχής ως πράξη συνεχών με $h(0) = -\pi < 0$, $h(\pi) = \pi > 0$. Είναι $h(0)h(\pi) < 0$, συνεπώς από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $\rho \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $h(\rho) = 0 \Leftrightarrow f(\rho)(\rho-\pi) - \rho\sigma\upsilon\nu\rho = 0$.

Συνεπώς, η εξίσωση $\frac{f(x)}{x} - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x-\pi} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, \pi)$.

B3. Είναι $f(-\pi) = \sqrt{\pi^2+1} - \eta\mu(-\pi) = \sqrt{\pi^2+1}$ και $f(\pi) = \sqrt{\pi^2+1} - \eta\mu\pi = \sqrt{\pi^2+1}$.

Επειδή $f(\pi) = f(-\pi)$, η f δεν αντιστρέφεται.

B4. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1+x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$. Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow -\eta\mu x \geq -1$ και η ισότητα ισχύει για $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, άρα $\sqrt{x^2+1} - \eta\mu x > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$ γιατί η ισότητα δεν ισχύει ταυτόχρονα.

Θέμα Γ

Γ1. Επειδή ισχύει για την f το θεώρημα Bolzano στο $[-1, 1]$, η f είναι συνεχής στο 0 , οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0).$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^x - 2^x - x + 1 \right] = 1 - 1 - 0 + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\ln(-x+1) - e^x + \kappa \right] = \ln 1 - e^0 + \kappa = -1 + \kappa. \text{ Άρα } -1 + \kappa = 1 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

Γ2. Για κάθε $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^{x_1} > \left(\frac{1}{3} \right)^{x_2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3} \right)^{x_1} + 1 > \left(\frac{1}{3} \right)^{x_2} + 1 \quad (1)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} \Leftrightarrow -2^{x_1} > -2^{x_2} \quad (2)$$

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2), (3) προκύπτει ότι $f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Για κάθε $x_1, x_2 \leq 0$ με $x_1 < x_2$ έχουμε: $-x_1 + 1 > -x_2 + 1 \Leftrightarrow \ln(-x_1 + 1) > \ln(-x_2 + 1)$ (4)

$$e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow -e^{x_1} + 2 > -e^{x_2} + 2 \quad (5) \text{ και } -x_1 > -x_2 \quad (6)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4), (5), (6) προκύπτει ότι $f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

Για κάθε $x_1 < 0 \leq x_2$ είναι $f(x_1) > f(0)$ και $f(0) \geq f(x_2)$, δηλαδή και πάλι $f(x_1) > f(x_2)$.

Επομένως για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι $f(x_1) > f(x_2)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(-x+1) - e^x + 2] = +\infty - 0 + 2 = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^x - 2^x - x + 1 \right] = 0 - \infty - \infty + 1 = -\infty.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

$$f(0) = \ln 1 - e^0 + 2 = 0 - 1 + 2 = 1 > 0, \quad f(1) = \frac{1}{3} - 2 - 1 + 1 < 0.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$ το οποίο είναι μοναδικό διότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

$$\text{Γ4. } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot \frac{1}{f(x)} \right].$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = -\infty$, διότι $f(x) < 0$ για $x > x_0$.

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right)$, θέτουμε $u = -\frac{1}{x-x_0}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(-\frac{1}{x-x_0}\right) = -\infty$, αφού $x > x_0$.

Έτσι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right) = \lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left[f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty, \text{ διότι } f(x) > 0 \text{ για } x < x_0.$$

Για να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right)$, θέτουμε $u = -\frac{1}{x-x_0}$, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(-\frac{1}{x-x_0}\right) = +\infty$, αφού $x < x_0$.

Έτσι $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = -\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$.

Τελικά $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left[f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = -\infty$, οπότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[f\left(-\frac{1}{x-x_0}\right) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = -\infty$

$$\text{Γ5. } 3^{-|x+1|} + 3 < 2^{|x+1|} + |x+1| + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^{-|x+1|} - |x+1| - 2^{|x+1|} + 1 + 2 < \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-|x+1|} - 2^{|x+1|} - |x+1| + 1 < \frac{1}{3} - 2 \Leftrightarrow f(|x+1|) < f(1) \text{ (διότι } f(1) = \frac{1}{3} - 2 - 1 + 1 = \frac{1}{3} - 2) \Leftrightarrow$$

$$|x+1| > 1 \Leftrightarrow x+1 > 1 \text{ ή } x+1 < -1 \Leftrightarrow x > 0 \text{ ή } x < -2.$$

Θέμα Δ

Δ1. Η σχέση (1) για $\text{συνκ} = \text{συνλ} = x$ με $x \in (-1,1)$ γιατί $\kappa, \lambda \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ γίνεται:

$$(f(x) + f(x))^2 = (e^x + e^x - x - x - 2)^2 \Leftrightarrow (2f(x))^2 = (2e^x - 2x - 2)^2 \Leftrightarrow 4(f(x))^2 = 4(e^x - x - 1)^2$$

$$(f(x))^2 = (e^x - x - 1)^2, x \in (-1,1).$$

Δ2. 1ος τρόπος γραφικά

Σχεδιάζουμε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις συναρτήσεις

$$y = e^x, y = x + 1, x \in \mathbb{R} \text{ και βλέπουμε ότι } \forall x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει: } e^x \geq x + 1 \text{ και η}$$

ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$ επειδή το μοναδικό κοινό σημείο είναι το

$B(0,1)$, ενώ για $x \neq 0$ ισχύει ότι η γραφική παράσταση της $y = e^x$ είναι

πάνω από την $y = x + 1$.

2ος τρόπος Αλγεβρικά

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^x - x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Η φ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$, άρα $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε

$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ και επειδή η φ είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό

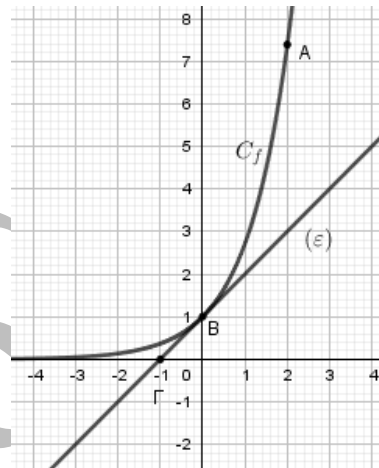
πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα

$(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

Είναι $\varphi(-1) = e^{-1} + 1 - 1 = \frac{1}{e} > 0$, άρα $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x < 0$.

Είναι $\varphi(1) = e - 1 - 1 = e - 2 > 0$, άρα $\varphi(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$.



Δ3. Έχουμε $(f(x))^2 = (e^x - x - 1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{(f(x))^2} = \sqrt{(e^x - x - 1)^2} \Leftrightarrow |(f(x))| = |e^x - x - 1|, x \in (-1,1)$ Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$ κατά συνέπεια και για $x \in (-1,1)$ ισχύει $e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0$ άρα $|(f(x))| = e^x - x - 1, x \in (-1,1)$.

Για $x \in (-1,1)$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - x - 1 = 0 \stackrel{\Delta 2}{\Leftrightarrow} x = 0$ και επειδή η f είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-1,0)$ και $(0,1)$.

Αλλά $-\frac{1}{2} \in (-1,0)$ με $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2} > 0$ γιατί $e < 4 \Leftrightarrow \sqrt{e} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{2}$ άρα $f(x) > 0$,

$x \in (-1,0)$ και $\frac{1}{2} \in (0,1)$ με $f(\frac{1}{2}) = \sqrt{e} - \frac{3}{2} > 0$ γιατί $e > \frac{9}{4} \Leftrightarrow \sqrt{e} > \frac{3}{2}$ άρα $f(x) > 0$, για κάθε

$x \in (0,1)$, οπότε $f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x \in (-1,0) \cup (0,1) \\ 0, & x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = e^x - x - 1, x \in (-1,1)$.

Δ4. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x - 1) = 0$ και για $x \in (-1,0) \cup (0,1)$ ότι $e^x > x + 1$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - x - 1} = +\infty$ κατά

συνέπεια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - x - 1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$.

Δ5. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\frac{999}{1000}, \frac{999}{1000}\right] \subseteq (-1,1)$, άρα από το θεώρημα μέγιστης

και ελάχιστης τιμής, παρουσιάζει μέγιστη τιμή M και ελάχιστη τιμή m στο διάστημα $\left[-\frac{999}{1000}, \frac{999}{1000}\right]$

επειδή η f δεν είναι σταθερή $m \neq M$. Επίσης από το Δ2 ερώτημα έχουμε ότι για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$ άρα και για κάθε $x \in \left[-\frac{999}{1000}, \frac{999}{1000}\right]$ ισχύει: $e^x \geq x + 1 \Leftrightarrow$

$e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$ και το $x_0=0$ είναι μοναδικό. Άρα στο $x_0=0$ η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0)=0$.

Ασκησίοπολις