Πατήστε στο σύνδεσμο για να μεταβείτε στο κριτήριο:

👇

https://forms.gle/qHdSgP5meXbDP9688

Στις επόμενες σελίδες οι λύσεις

👇

1. Όταν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ τότε για πολύ μεγάλες τιμές του x, οι τιμές του y=f(x) είναι πολύ μικρές, άρα όταν οι τιμές του x είναι μεγαλύτερες από οποιονδήποτε θετικό αριθμό α, τότε $f(x) < 0$.
Η πρόταση είναι σωστή.

2. Η πρόταση είναι σωστή. Ιδιότητα ορίων στη σελίδα 60 που επεκτείνεται η ισχύ της και στο άπειρο.

• Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[k]{f(x)} = +\infty$. σελίδα 60

σελίδα 66

Για τα όρια στο $+\infty$, $-\infty$ ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες των ορίων στο x_0 με την προϋπόθεση ότι:

— οι συναρτήσεις είναι ορισμένες σε κατάλληλα σύνολα και

— δεν καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

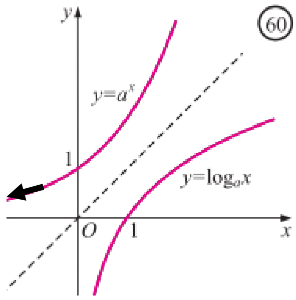
3. Η πρόταση είναι σωστή γιατί $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\nu = \begin{cases} +\infty, & \nu = \text{άρτιος} \\ -\infty, & \nu = \text{περιττός} \end{cases}$, οπότε

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^\nu} \underset{\omega\to\pm\infty}{\overset{x^\nu=\omega}{=}} \lim_{\omega\to\pm\infty} \frac{1}{\omega} = 0$$

4. Έστω $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + 1 - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$
Η πρόταση είναι Λάθος.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow \\ \omega\to 0}}{\overset{\frac{1}{x}=\omega\Leftrightarrow x=\frac{1}{\omega}}{=}} \lim\limits_{\omega\to 0} \frac{1}{\omega}\eta\mu\omega = \lim\limits_{\omega\to 0} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$. Η πρόταση είναι σωστή.

6. Η πρόταση είναι Λάθος.



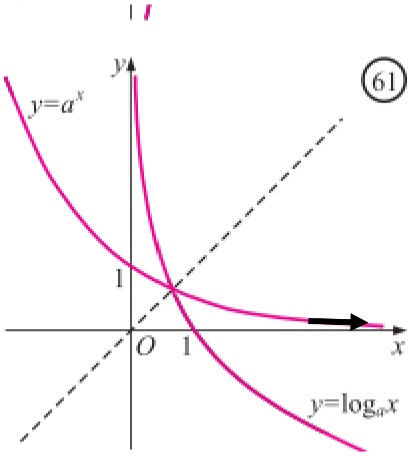
- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$$

7. Η πρόταση είναι σωστή. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^x = 0$

- Αν $0 < \alpha < 1$ (Σχ. 61), τότε

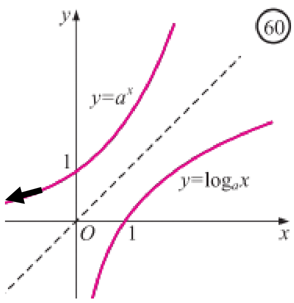
$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$$



[1] Η απόδειξη παραλείπεται.

8. Η πρόταση είναι σωστή. Δείτε την προηγούμενη απάντηση.

9. Η πρόταση είναι Λάθος.



- Αν $\alpha > 1$ (Σχ. 60), τότε

$$\lim_{x\to-\infty} \alpha^x = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0} \log_\alpha x = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$$

10. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, **είναι** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln x} \underset{\substack{x\to+\infty \Rightarrow \\ u\to+\infty}}{\overset{\ln x = u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{1}{u} = 0$.

Η πρόταση είναι σωστή.

11. **Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+e^{-x}\right)=0+0=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. Η πρόταση είναι σωστή.**

12. **Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ και $f(x)\geq x^2$ για κάθε $x>0$, οπότε και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$. Η πρόταση είναι σωστή.**

13. **Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+...+\alpha_1 x+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq 0$. Επειδή το $Q(x)$ έχει τον ίδιο βαθμό με το P, θα είναι της μορφής $Q(x)=\beta_\nu x^\nu+...+\beta_1 x+\beta_0,\ \beta_\nu\neq 0$.**
Από το θεώρημα των μεγιστοβάθμιων είναι
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\nu x^\nu}=\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}\in\mathbb{R}$.Η πρόταση είναι σωστή.

14. **Έστω $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+...+\alpha_1 x+\alpha_0,\ \alpha_\nu\neq 0$ και**
$Q(x)=\beta_\mu x^\mu+...+\beta_1 x+\beta_0,\ \beta_\mu\neq 0$
Αν τα P, Q έχουν τον ίδιο βαθμό, τότε από την προηγούμενη ερώτηση είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}\in\mathbb{R}$.
Αν ο βαθμός του P(x) είναι μικρότερος από τον βαθμό του Q(x), δηλαδή αν $\nu<\mu$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}=\dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu x^{\mu-\nu}}=0$.
Αν ο βαθμός του P(x) είναι μεγαλύτερος από τον βαθμό του Q(x), δηλαδή αν $\nu>\mu$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha_\nu x^\nu}{\beta_\mu x^\mu}=\dfrac{\alpha_\nu x^{\nu-\mu}}{\beta_\nu}=\pm\infty$.
Η πρόταση είναι Λάθος.

15. **Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+x+1}{4x^2+7}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{4x^2}=\dfrac{1}{4}=0,25$, δηλαδή για πολύ μεγάλες τιμές του x, οι τιμές $y=f(x)$ προσεγγίζουν το 0,25.**
Επειδή το 10^{2025} είναι πολύ μεγάλος αριθμός προσεγγίζεται με ικανοποιητική ακρίβεια από τον αριθμό 0,25. Σωστή απάντηση είναι η Δ.

16. Α. $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{συν}\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\text{συν}u = \text{συν}0 = 1$ **Σωστή.**

Β. Για κάθε x > 0 είναι $-1 \le \text{συν}x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\text{συν}x}{x} \le \frac{1}{x}$.

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$, **οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{συν}x}{x} = 0$. **Σωστή πρόταση.**

Γ. Για κάθε x > 0 είναι $-1 \le \text{ημ}x \le 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \le \frac{\text{ημ}x}{x} \le \frac{1}{x}$.

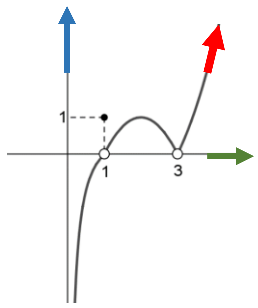
Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$, **οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\text{ημ}x}{x} = 0$. **Λάθος πρόταση.**

Δ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{ημ}\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}\text{ημ}u = \text{ημ}0 = 0$. **Σωστή πρόταση.**

Ε. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\text{εφ}\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to+\infty\Rightarrow\\ u\to 0}}{\overset{\frac{1}{x}=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0}u\text{εφ}u = 0\cdot 0 = 0$.**Σωστή πρόταση.**

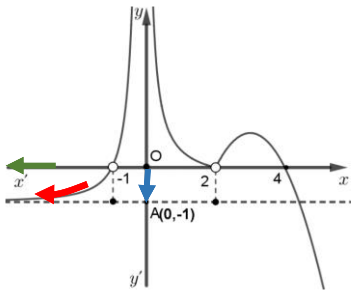
17. Όταν οι τιμές του x τείνουν στο $+\infty$ **(πράσινο βελάκι) τότε τα σημεία της καμπύλης κινούνται πάνω δεξιά όπως δείχνει το κόκκινο βελάκι και οι τιμές y=f(x) μεγαλώνουν απεριόριστα (μπλε βελάκι), άρα** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.



Τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)} \underset{\lim\limits_{x\to+\infty} u=+\infty}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{u} = 0$.

Σωστή απάντηση είναι η Γ.

18. Όταν οι τιμές του x μικραίνουν απεριόριστα, δηλαδή $x\to-\infty$ **(πράσινο βελάκι), τότε τα σημεία της καμπύλης πλησιάζουν απεριόριστα την ευθεία y = - 1 (κόκκινο βελάκι) και οι τιμές y=f(x) πλησιάζουν το – 1 (μπλε βελάκι), άρα** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$.



Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{f(x)+1} \underset{\substack{\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+1)=0\\ \text{και } f(x)>-1\\ \text{κοντά στο } -\infty}}{\overset{f(x)+1=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\frac{1}{u} = +\infty$.

Σωστή απάντηση είναι η Α.

19. **Α. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-x-x^3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3\right)=+\infty$, άρα $1-x-x^3>0$ σε μια περιοχή του $-\infty$, οπότε το όριο είναι καλώς ορισμένο.**

Β. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^9-x-2024\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^9=+\infty$, άρα $3x^9-x-2024>0$ σε μια περιοχή του $+\infty$, οπότε το όριο είναι καλώς ορισμένο.

Γ. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^{1821}+x+2024\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-3x^{1821}\right)=-\infty$, άρα $-3x^{1821}+x+2024<0$ σε μια περιοχή του $+\infty$, οπότε το όριο <u>δεν</u> είναι καλώς ορισμένο.

Δ. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{31}+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, άρα $x^{31}+\dfrac{1}{x}>0$ σε μια περιοχή του $+\infty$, οπότε το όριο είναι καλώς ορισμένο.

20. **Επειδή η ταυτότητα $\left(1-2x^2\right)^3$ θα δώσει ως μεγιστοβάθμια δύναμη το $\left(-2x^2\right)^3=-8x^6$ και η ταυτότητα $\left(x^2+1\right)^3$ έχει ως μεγιστοβάθμιο παράγοντα το $\left(x^2\right)^3=x^6$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-2x^2\right)^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8x^6}{x^6}=-8$.**

Σωστή απάντηση είναι η Ε.