1ο Τελικό Διαγώνισμα	
ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ	
Μάθημα :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Τάξη :	Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
Ημερομηνία :	
ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ :	

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

(Μονάδες 15)

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι «1−1» και το $M(\alpha,\beta)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f ,τότε το σημείο $\Lambda(\beta,\alpha)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f^{-1}.

β. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

γ. Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2023$, τότε ισχύει: $\left(f(2023)\right)'=f'(2023)$

ε. Υπάρχει συνάρτηση f $1-1$ για την οποία ισχύει το θεώρημα του Rolle σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β (31643)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-3x^3-x^2+9x,\ x\in[1,2]$.

Β1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$.

(Μονάδες 12)

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-9x^2-2x+9=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu\alpha x}{x}+3 & ,x>0\\ x^3-3x^2+5 & ,x\le 0\end{cases}$$

όπου α πραγματικός αριθμός με $\alpha\neq 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha=2$.

(Μονάδες 5)

Για $\alpha=2$.

Γ2.Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f και στην συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},3\right)$.

(Μονάδες 6+3)

Γ3.Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(Μονάδες 5)

Γ4.Να δείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός k με $k\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $(\pi+2)f'(k)=4$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ (23957)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{\ln^2 x}$, $x>0$.

Δ1. Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=2\frac{\ln x}{x}f(x)$.

(Μονάδες 8)

Δ2. Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1.

(Μονάδες 7)

Δ3. Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^e \frac{2\cdot\ln x\cdot f(x)+xe^x}{x\left(f(x)+e^x\right)}dx$.

(Μονάδες 10)

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1.Ας υποθέσουμε ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$.Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta,\ x\in[\alpha,\beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $g(\alpha)g(\beta)<0$,αφού $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>0$.

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=f(x_0)-\eta=0$, οπότε $f(x_0)=\eta$.

Α2.1.Σ 2.Σ 3.Λ 4.Λ 5.Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι συνεχής στο [1, 2] ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (1, 2) με $f'(x)=4x^3-9x^2-2x+9$. Είναι $f(1)=1-3-1+9=6,\ f(2)=16-24-4+18=6$, δηλαδή $f(1)=f(2)$, οπότε εφαρμόζεται για την f το θεώρημα Rolle στο [1, 2].

Β2. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, η εξίσωση $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-9x^2-2x+9=0$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής, είναι συνεχής και στο x = 0, οπότε

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Leftrightarrow\lim_{x\to0^-}\left(x^3-3x^2+5\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\eta\mu\alpha x}{x}+3\right)=5\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\alpha\frac{\eta\mu\alpha x}{\alpha x}+3\right)=5\overset{\alpha x=u}{\Leftrightarrow}\lim_{u\to0^+}\left(\alpha\frac{\eta\mu u}{u}+3\right)=5\Leftrightarrow\alpha+3=5\Leftrightarrow\alpha=2$$

Γ2.Για $\alpha=2$ είναι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu2x}{x}+3 & ,x>0\\ x^3-3x^2+5 & ,x\le0\end{cases}$.

Για x > 0 είναι $f'(x)=\left(\dfrac{\eta\mu2x}{x}+3\right)'=\dfrac{2x\sigma\upsilon\nu2x-\eta\mu2x}{x^2}$.

Για x < 0 είναι $f'(x)=\left(x^3-3x^2+5\right)'=3x^2-6x$.

Στο x = 0 είναι

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^3-3x^2+5-5}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cancel{x}\left(x^2-3x\right)}{\cancel{x}}=0,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{\eta\mu2x}{x}+3-5}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\eta\mu2x-2x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{2\sigma\upsilon\nu2x-2}{2x}\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{-4\eta\mu2x}{2}=0.$$

Επειδή $\lim_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$, η f είναι παραγωγίσιμη στο x = 0 με $f'(0)=0$.

Τελικά $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2xσυν2x-ημ2x}{x^2}, & x>0 \\ 3x^2-6x, & x\le 0 \end{cases}$.

Είναι $f\left(\frac{π}{2}\right)=\dfrac{ημ\cancel{2}\frac{π}{\cancel{2}}}{\frac{π}{2}}+3=0+3=3$, $f'\left(\frac{π}{2}\right)=\dfrac{2\cdot\frac{π}{2}συν2\cdot\frac{π}{2}-ημ2\cdot\frac{π}{2}}{\left(\frac{π}{2}\right)^2}=\dfrac{-π}{\frac{π^2}{4}}=-\dfrac{4}{π}$.

Η εφαπτομένη της C_f στο Α έχει εξίσωση:

$$y-f\left(\frac{π}{2}\right)=f'\left(\frac{π}{2}\right)\left(x-\frac{π}{2}\right)\Leftrightarrow y-3=-\frac{4}{π}\left(x-\frac{π}{2}\right)\Leftrightarrow y=-\frac{4}{π}x+5$$

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ημ2x}{x}+3\right)=3$ γιατί για κάθε x > 0 είναι

$-1\le ημ2x\le 1\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x}\le\dfrac{ημ2x}{x}\le\dfrac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ημ2x}{x}=0$.

Γ4. Σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για την f, υπάρχει $k\in\left(-1,\frac{π}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(k)=\frac{f\left(\frac{π}{2}\right)-f(-1)}{\frac{π}{2}+1}=\frac{3-1}{\frac{π+2}{2}}=\frac{4}{π+2}\Leftrightarrow(π+2)f'(k)=4$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $g(x)=e^x$, $h(x)=x^2$ και $φ(x)=\ln x$ με $f'(x)=e^{\ln^2 x}\left(\ln^2 x\right)'=f(x)\cdot 2\ln x(\ln x)'=2\dfrac{\ln x}{x}f(x)$.

Δ2. Είναι $f'(x)\ge 0\Leftrightarrow 2\dfrac{\ln x}{x}f(x)\ge 0\Leftrightarrow \ln x\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$.

Για κάθε $x\in(0,1)$ είναι $f'(x)<0$ και για κάθε x > 1 είναι $f'(x)>0$, επειδή η f είναι συνεχής, είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Η f έχει ελάχιστο το $f(1)=1$.

Δ3. $I=\displaystyle\int_1^e\frac{2\ln x\cdot f(x)+xe^x}{x\left(f(x)+e^x\right)}dx=\int_1^e\frac{\frac{2\ln x\cdot f(x)}{x}+\frac{xe^x}{x}}{\frac{x\left(f(x)+e^x\right)}{x}}dx\Leftrightarrow$

$$I=\int_1^e\frac{f'(x)+e^x}{f(x)+e^x}dx=\int_1^e\frac{\left(f(x)+e^x\right)'}{f(x)+e^x}dx\Leftrightarrow$$

$$I=\left[\ln\left|f(x)+e^x\right|\right]_1^e=\ln\left(f(e)+e^e\right)-\ln\left(f(1)+e\right)=\ln\frac{e+e^x}{1+e}.$$