

Γενικά Επαναληπτικά Διαγωνίσματα από το Askisopolis



Συμμετέχουν οι μαθηματικοί:

Στέλιος Μιχαήλογλου | Δημήτρης Πατσιμάς

Βαγγέλης Ραμαντάνης | Αποστόλης Κακαβάς

Άγγελος Μπλιάς | Νίκος Τούντας



2020 - 2021



Ασκησόπολις
ο πιο πλούσιος κόσμος
θεμάτων και ασκήσεων

3ο Διαγώνισμα

9-3-2021

Θέμα Α

A1. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη

$$\text{στο } (0, +\infty) \text{ και ισχύει } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

μονάδες 7

A2. Ποια συνάρτηση ονομάζεται πρώτη παράγωγος μιας συνάρτησης f ; Πως ορίζεται η νιοστή παράγωγος μιας συνάρτησης f με $n \geq 3$;

μονάδες 4

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

« Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq A$, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα και στο σύνολο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ ».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.

μονάδες 1+3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν στο x_0 σημείο καμπής, τότε και η $h = f \cdot g$ έχει στο x_0 σημείο καμπής.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

μονάδες 6

A5. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$, $\ell, m \in \mathbb{R}$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε αυτό που ισχύει σε κάθε περίπτωση είναι:

A. $\ell < m$ B. $\ell \leq m$ Γ. $\ell \geq m$ Δ. $\ell = m$ E. $m < \ell$

β) Αν οι εφαπτομένες των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 2x^2$ στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι παράλληλες, τότε το x_0 είναι:

A. 0

B. 1/4

Γ. 1/2

Δ. 1

E. 2

μονάδες 4

Θέμα Β

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = 3$. Έστω ακόμη η παράγωγος της f είναι συνεχής και η ευθεία ϵ είναι εφαπτομένη της C_f στο $x = 4$.

B1. Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

μονάδες 2

B2. Να γράψετε ένα διάστημα της μορφής $[a, \beta]$

στο οποίο να ισχύει

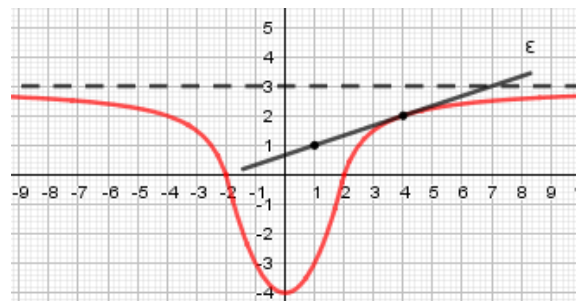
α) το Θ. Bolzano για την f

β) το Θ. Rolle για την f .

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

μονάδες 6

B3. Να γράψετε, αν υπάρχει, σημείο στο οποίο να εφαρμόζεται το θεώρημα Fermat για την f .



Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+4}{x}$.

μονάδες 3+2

B4. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Έχει η f πλάγια ασύμπτωτη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

μονάδες 2+4

B5. Να υπολογίσετε το $f'(4)$ και να βρείτε την εξίσωση της ϵ .

μονάδες 3+3

Θέμα Γ

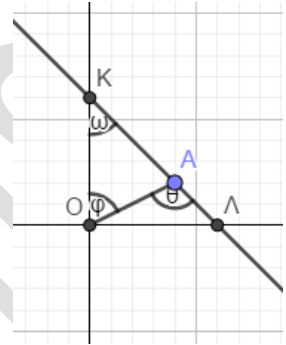
Μια ευθεία περιστρέφεται γύρω από το σημείο $A(8,4)$ και τέμνει τον θετικό ημιάξονα Ox σ' ένα σημείο Λ με τετμημένη μεγαλύτερη του 10 και τον $y'y$ άξονα στο K . Δίνεται ότι το σημείο Λ κινείται πάνω στον $x'x$ άξονα με σταθερή ταχύτητα $x'(t)=2$ cm/sec. Αν $y(t)$ η συνάρτηση θέσης του σημείου K τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι $x(t)y(t) = 4x(t) + 8y(t)$.

Γ2. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία κινείται το K , όταν η ευθεία διέρχεται από το σημείο $P(12,0)$.

Μονάδες 9

Μονάδες 8



Γ3. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\theta(t) = \frac{x(t)+2y(t)}{y(t)-2x(t)}$ και να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \angle O\Lambda A$

(O , η αρχή των αξόνων) ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή t_0 που η ευθεία διέρχεται από το παραπάνω σημείο P .

Δίνεται ο τύπος $\epsilon\phi(\omega + \phi) = \frac{\epsilon\phi\omega + \epsilon\phi\phi}{1 - \epsilon\phi\omega \cdot \epsilon\phi\phi}$.

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τα σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g στα οποία η κατακόρυφη απόστασή τους γίνεται ελάχιστη. Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία αυτά είναι παράλληλες.

Μονάδες 6

Δ2. Αν $f(x) \geq \lambda g(x) + 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες 5

Δ3. Να δείξετε ότι η αντίστροφη της f τέμνει τη γραφική παράσταση της g ακριβώς σε ένα σημείο M . Στη συνέχεια να δείξετε ότι οι εφαπτομένες των $C_{f^{-1}}, C_g$ στο M είναι κάθετες.

Μονάδες 5

Δ4. Να κάνετε κατάλληλο σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται τα αποτελέσματα του Δ3.

Μονάδες 3

Δ5. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της C_f στο 1ο τεταρτημόριο που η εφαπτομένη της είναι και εφαπτομένη της C_g .

Μονάδες 6

Καλή Τύχη!